

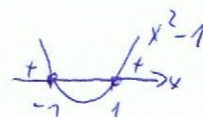
ZADANIA

1. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \arctg \sqrt{x^2 - 1}$ i doprowadzić ją do możliwie najprostszej postaci.
2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstremum lokalne funkcji $f(x) = 3(\ln x)^5 - 5(\ln x)^3$.
3. Chcemy wykonać poziomą, otwartą od góry rynną, której przekrojem poprzecznym jest prostokąt o polu 450 cm^2 . Jakie powinny być wymiary tego przekroju, aby zminimalizować ilość blachy potrzebnej do konstrukcji rynny?
4. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$.
5. Z jaką dokładnością obliczamy wsq3 postępując się wzorem MacLaurina zawierającym wielomian MacLaurina stopnia co najwyżej 3? Obliczyć tę wartość i porównać otrzymany wynik z wartością wsq3 obliczoną na kalkulatorze.

RÓZWIĄZANIA

1. $f(x) = \arctg \sqrt{x^2 - 1}$

Dzielnik: $x^2 - 1 \geq 0$



$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. $f(x) = 3(\ln x)^5 - 5(\ln x)^3$

Dzielnik: $x > 0$

Pochodna: $f'(x) = 15(\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} - 15(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{15}{x} [(\ln x)^4 - (\ln x)^2] =$

$$= \frac{15}{x} (\ln x)^2 [(\ln x)^2 - 1] = \frac{15}{x} (\ln x)^2 (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

(2)

Ponieważ $x > 0$, to $\frac{15}{x} > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 1 \vee \ln x = -1$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1; \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e; \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Obliczamy wartości funkcji f w powyższych punktach

$$f(1) = 0; f(e) = 3 - 5 = -2; f\left(\frac{1}{e}\right) = 3 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 (\ln x - 1)(\ln x + 1) > 0$$

$$\ln x = t, t \in \mathbb{R}$$

$$t^2 (t-1)(t+1) > 0$$

$$t > 1 \text{ lub } t < -1$$

$$\ln x > 1 \text{ lub } \ln x < -1$$

$$\ln x > \ln e \text{ lub } \ln x < \ln \frac{1}{e}$$

$$x > e \text{ lub } 0 < x < \frac{1}{e} \quad (\text{z założenia } x > 0)$$



Tabela zmienności

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, 1)$	1	$(1, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$

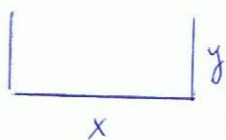
Maksimum
lokalne

Minimum
lokalne

Odp. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(0, \frac{1}{e})$ oraz $(e, +\infty)$, a maleje w przedziale $(\frac{1}{e}, e)$. Ma w punkcie $x = \frac{1}{e}$ maksimum lokalne równe 2, a w punkcie $x = e$ minimum lokalne równe -2.

3. Przekrój rynn

(3)



$$xy = 450, x > 0, y > 0$$

$$y = \frac{450}{x}$$

Ilość blachy potrzebne do wykonanie rynn będzie minimalna, jeśli obwód przekroju, tj. $x+2y$, będzie minimalny.

$$x+2y = x + \frac{900}{x} \rightarrow \min \quad (x > 0)$$

$$f(x) = x + \frac{900}{x}, x > 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{900}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{900}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 30$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{900}{x^2} > 0, \frac{900}{x^2} < 1 \quad | \cdot x^2 > 0$$

$$x^2 > 900, x > 30 \quad (\text{bo } x > 0)$$

x	(0, 30)	30	(30, +∞)
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	f _{min}	↗

Dla $x=30$ obwód przekroju jest najmniejszy. Mamy wtedy $y = \frac{450}{30} = 15$

Odp. Wymiary przekroju rynn to podstawa 30 cm i wysokość 15 cm.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\sqrt{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x &\stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{2}}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x^{\frac{1}{2}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0 \end{aligned}$$

5. Wzór Maclaurina z wielomianem Maclaurina stopnia co najmniej 3:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4,$$

gdzie c jest pewnym punktem pośrednim pomiędzy 0 a x .

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(c) = \cos c \end{array}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos c}{24}x^4, \quad c - \text{pośredni pomiędzy } 0 \text{ a } x$$

Wartość przybliżona: $\cos 0,3 \approx 1 - \frac{0,3^2}{2} = 1 - \frac{0,09}{2} = 0,955$

Oszacowanie błędni: $\left| \frac{\cos c}{24} \cdot 0,3^4 \right| \leq \frac{0,3^4}{24} = \frac{0,0081}{24} = 0,0003375$

Przybliżenie z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

Z kalkulatora: $\cos 0,3 \approx 0,9553364891$ ($x=0,3$ wyrażamy w radianach)

Różnica pomiędzy wartością z kalkulatora, a obliczoną wg wzoru Maclaurina to $0,0003364891 < 0,0003375$. Wiadzi stąd, że oszacowanie błędni uzyskane we wzorze Maclaurina jest dość dokładne.