

Automatyka i Robotyka, II semestr, studia dzienne

Zadania na ćwiczenia, zestaw XIV

1. Rozwiązać równania różniczkowe cząstkowe

$$\text{a) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \text{b) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \text{c) } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{d) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy, \quad \text{e) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 6y, \quad \text{f) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x.$$

2. Wprowadzając w podany sposób nowe zmienne rozwiązać równania różniczkowe cząstkowe

$$\text{a) } 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 2x + y, v = 3x - 2y,$$

$$\text{b) } 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 11 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = x - 3y, v = 4x + y,$$

$$\text{c) } 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 2x + 3y, v = 3x - 2y,$$

$$\text{d) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = x - 5y, v = 2x + y,$$

$$\text{e) } 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = x - y, v = x - 2y,$$

$$\text{f) } 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 7 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 3x + 4y, v = x + y,$$

$$\text{g) } 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 13 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 10 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 5x - y, v = 2x + 3y,$$

$$\text{h) } 49 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 28 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 2x - 7y, v = x + 4y,$$

$$\text{i) } 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = 3x + y, v = x + 3y,$$

$$\text{j) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad u = x + 2y, v = 2x - y.$$

Uwaga. Zakładamy równość pochodnych mieszanych.

3. Rozwiązać równania z poprzedniego zadania, jeśli ich prawe strony zamiast zer mają postać

$$\text{a) } x + y, \quad \text{b) } xy, \quad \text{c) } \sin y, \quad \text{d) } y \cos x.$$

4. Wprowadzając współrzędne biegunowe przekształcić wyrażenia różniczkowe

$$\text{a) } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{b) } x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{c) } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2, \quad \text{d) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Uwaga. W podpunkcie d) zakładamy równość pochodnych mieszanych.

5. Wprowadzając w podany sposób nowe zmienne przekształcić wyrażenia różniczkowe

$$\text{a) } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad u = x, v = \frac{y}{x},$$

$$\text{b) } x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad u = xy, v = \frac{x}{y} \quad (\text{zakładamy równość pochodnych mieszanych}).$$