

Automatyka i Robotyka, II semestr, studia dzienne

Zadania na ćwiczenia, zestaw XVIII

1. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane
 - a) $\int_L xy dL$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$,
 - b) $\int_L x^2 y dL$, gdzie L jest ćwiartką okręgu $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. Wyznaczyć środek masy odcinka prostej $y = x$, $0 \leq x \leq 1$ o gęstości
 - a) $\sigma(x, y) = xy$,
 - b) $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Obliczyć momenty bezwładności jednorodnej krzywej $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ względem obu osi oraz początku układu współrzędnych.
4. Obliczyć masę brzegu trójkąta o wierzchołkach $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ o gęstości $\sigma(x, y, z) = xyz$.
5. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane
 - a) $\int_L x^2 y dx + (x - 2y) dy$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, skierowanym od $A(0, 0)$ do $B(1, 1)$,
 - b) $\int_L y^2 z dx + z^2 x dy + x^2 y dz$, gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, skierowanym dodatnio (tj. „w lewo” w układzie prawoskrętnym).
6. Stosując twierdzenie Greena obliczyć całki krzywoliniowe skierowane
 - a) $\oint_K 4y dx + 7x dy$, gdzie K jest krzywą o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$,
 - b) $\oint_K x^2 y dx + xy^2 dy$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ skierowanym dodatnio (tj. „w lewo” lub zgodnie z ruchem wskazówek zegara).
7. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane
 - a) $\int_K \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ wzdłuż dowolnego łuku K o początku $A(3, 4)$ i końcu $B(5, 12)$ nie przechodzącego przez punkt $(0, 0)$,
 - b) $\int_K yz dx + xz dy + xy dz$ wzdłuż dowolnego łuku K o początku $A(1, -1, 2)$ i końcu $B(3, 0, 1)$.
8. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, aby dźwignąć ładunek 1T z powierzchni Ziemi na wysokość $h = 25\text{m}$.