

Automatyka i Robotyka, II semestr, studia dzienne

Zadania na ćwiczenia, zestaw XIX

1. Obliczyć całkę powierzchniową nieorientowaną $\iint_S z dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $z = 5 - x - 3y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
2. Obliczyć całkę powierzchniową nieorientowaną $\iint_S \frac{2xyz dS}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$, gdzie S jest powierzchnią paraboloidy $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
3. Wyznaczyć środek masy jednorodnej paraboloidy $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.
4. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ zorientowanym „w górę”, tj. zgodnie ze zwrotem osi z .
5. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S dydz + dzdx - dxdy$, gdzie S jest powierzchnią boczną stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ zorientowaną „w dół”.
6. Stosując twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego obliczyć całki
 - a) $\iiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, gdzie S jest sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz,
 - b) $\iiint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$, gdzie S jest powierzchnią bryły o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 4)$, $C(1, 0, 0)$, $D(1, 0, 2)$, $E(0, 1, 0)$, $F(0, 1, 1)$ zorientowaną do wewnątrz,
 - c) $\iiint_S (x+z) dydz + (y-x) dzdx + z^2 dxdy$, gdzie S jest powierzchnią czworoscianu o wierzchołkach $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ zorientowaną na zewnątrz.
7. Stosując twierdzenie Stokesa obliczyć całki
 - a) $\oint_K xdx + ydy + zdz$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ skierowanym dodatnio i ograniczającym półsferę $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
 - b) $\oint_K y^2 zdx + xz^2 dy + x^2 ydz$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ skierowanym dodatnio i ograniczającym część płaszczyzny $z = 1$,
 - c) $\oint_K (x-y)dx + (2x-y+z)dy + (x+2y-z)dz$, gdzie K jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ skierowanym dodatnio.