

Automatyka i Robotyka, I semestr, studia dzienne

Zadania na ćwiczenia, zestaw III

1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\text{a) } a_n = \frac{3n^4 - 2n^3 + 4n^2 - 6n + 1}{2n^4 + 5n^3 - 7n^2 - 2n + 3}, \quad \text{b) } a_n = \frac{3 - 2n + n^2}{n^3 + n + 1}, \quad \text{c) } a_n = \frac{1 - 2n^5}{3n^4 + 4n^3 + 2}.$$

2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\text{a) } a_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n, \quad \text{b) } a_n = \sqrt{2n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}, \quad \text{c) } a_n = \sqrt{n^4 + 4n^2 + 1} - 2n.$$

3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\text{a) } a_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - n, \quad \text{b) } a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}, \quad \text{c) } a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1}.$$

4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\text{a) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}, \quad \text{b) } a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{c) } a_n = \left(\frac{n+6}{n+2}\right)^n, \quad \text{d) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

5. Stosując twierdzenie o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeśli

$$\text{a) } a_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}, \quad \text{b) } a_n = \frac{\sin n}{n^2}, \quad \text{c) } a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n},$$

$$\text{d) } a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

6. Obliczyć granice

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 12}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^4 - 1}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}.$$

7. Obliczyć granice a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

8. Obliczyć obie granice jednostronne podanej funkcji

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ w punkcie } x_0 = 2, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ w punkcie } x_0 = -1,$$

$$\text{c) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ w punkcie } x_0 = 0.$$

9. Wyprowadzić wzory na obwód i pole koła o promieniu r posługując się wielokątami foremnymi

a) wpisanymi w to koło, b) opisanymi na tym kole.

10. Wyznaczyć równania asymptot funkcji

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 2}, \quad \text{b) } f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}, \quad \text{d) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$