

Automatyka i Robotyka, I semestr, studia dzienne

Zadania na ćwiczenia, zestaw VI

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^3 - 1}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 2x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}, \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2), & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}), & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctg x)^x, \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x, & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

2. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

$$\text{a) } \sqrt[3]{27.03}, \quad \text{b) } \arctg 1.05, \quad \text{c) } e^{-0.001}, \quad \text{d) } \ln 0.996.$$

3. Napisać wzór Taylora dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a) } f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi, \quad n = 6, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3.$$

4. Stosując wzór Taylora do odpowiednio dobranych funkcji, punktów oraz $n \in \mathbb{N}$ obliczyć wartości podanych wyrażeń ze wskazaną dokładnością:

$$\text{a) } \cos 0.2, \quad 10^{-4}, \quad \text{b) } e, \quad 10^{-3}, \quad \text{c) } \ln 0.9, \quad 10^{-2}, \quad \text{d) } \sqrt[3]{1.003}, \quad 10^{-4}.$$

5. Oszacować dokładność wzorów przybliżonych na podanych przedziałach:

$$\text{a) } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla } |x| < \frac{1}{10}, \quad \text{b) } \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{dla } |x| < \frac{\pi}{6}.$$

6. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema następujących funkcji oraz punkty przegięcia odpowiadających im krzywych:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \quad \text{b) } u(x) = x + \frac{4}{x}, \quad \text{c) } g(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$

7. Znaleźć ekstrema następujących funkcji i równania asymptot odpowiadających im krzywych:

$$\text{a) } f(x) = 4x - \operatorname{tg} x \quad \text{dla } (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \quad \text{b) } k(x) = \frac{2x+1}{x^3-8}.$$

8. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$\text{a) } f(x) = x + \sin x, \quad \text{b) } u(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 3}, \quad \text{c) } g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}, \quad \text{d) } g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

9. Ze wszystkich trójkątów, dla których suma długości wysokości i podstawy jest równa b , wybrać trójkąt o największym polu.

10. Liczbę 25 rozłożyć na sumę takich dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.

11. Z kwadratowego arkusza blachy o boku a wykonać pudełko (bez zamknięcia) o największej objętości.

12. Na kuli o promieniu R opisano stożek. Jaka będzie wysokość stożka o najmniejszej objętości.

13. W półokrąg o promieniu R wpisano trapez, którego podstawa jest średnicą okręgu. Dla jakiego kąta przy podstawie trapezu jego pole będzie największe.

14. W kulę o promieniu R wpisano walec obrotowy. Obliczyć przy jakiej wartości promienia r podstawy walca pole jego powierzchni bocznej S będzie największe.

15. Ze wszystkich stożków o danej tworzącej l wybrać ten, który ma największą objętość. Znaleźć tę objętość.