

POCHODNE CZĄSTKOWE FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Twierdzenie (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej). Załóżmy, że funkcje $u(x, y)$, $v(x, y)$ mają pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0) , a funkcja $f(u, v)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie $(u_0, v_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Wtedy funkcja złożona

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

ma w punkcie (x_0, y_0) pochodne cząstkowe, które wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Powyższe twierdzenie znajduje zastosowanie w rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych, tj. takich równań różniczkowych, w których wraz z funkcją niewiadomą występują jej pochodne cząstkowe. Często właściwa zamiana zmiennych pozwala na znaczne uproszczenie równania różniczkowego, a co za tym idzie, na łatwiejsze jego rozwiązanie.

Przykład 1. Przekształcić wyrażenie różniczkowe

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

wprowadzając nowe zmienne $u = 2x + y$, $v = 3x - 2y$.

Z powyższej zamiany zmiennych obliczamy

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2.$$

Według wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Uwzględniając wzory (1) otrzymujemy stąd

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Wstawiamy do wzoru (2) w miejsce f wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Korzystając jeszcze raz z (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial v} \left(2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \\ &= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Uwzględniając równość pochodnych mieszanych otrzymujemy stąd

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Podobną metodą obliczamy pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{(2)}{=} 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych

$$(6) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Korzystając teraz ze wzorów (4), (5), (6) dostajemy

$$\begin{aligned}4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 4 \left(4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + \\ &+ 12 \left(2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + 9 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 49 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

Przykład 2. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego

$$(7) \quad 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Wprowadzając nowe zmienne $u = 2x + y$, $v = 3x - 2y$ i korzystając z Przykładu 1 przekształcamy równanie (7) do postaci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0.$$

Całkujemy obie strony tego równania względem u :

$$\int \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du = \int 0 du,$$

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \varphi(v),$$

gdzie φ jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej (zauważmy, że stała całkowania w równaniu (8) nie zależy od u , ale może zależeć od v , gdyż jej pochodna cząstkowa względem u musi wynosić 0). Całkując teraz obie strony równania (8) względem u dostajemy

$$f(u, v) = u\varphi(v) + \psi(v),$$

gdzie ψ jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracając do zmiennych x, y otrzymujemy stąd rozwiązanie równania (7):

$$(9) \quad f(x, y) = (2x + y)\varphi(3x - 2y) + \psi(3x - 2y),$$

gdzie φ, ψ są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi jednej zmiennej.

Widzimy więc, że równanie różniczkowe cząstkowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Często przy rozwiązywaniu problemów natury technicznej interesuje nas nie tyle ogólna postać rozwiązania równania różniczkowego, ile konkretne jego rozwiązanie spełniające jakieś dodatkowe warunki (wynikające np. z natury rozpatrywanego zagadnienia).

Przykład 3. Wyznaczyć rozwiązanie $f(x, y)$ równania (7) spełniające warunki

$$(10) \quad f(x, 0) = 0,$$

$$(11) \quad f(x, 1) = 1 - 9x^2.$$

Wstawiając $y = 0$ do wzoru (9) oraz korzystając z warunku (10) otrzymujemy

$$f(x, 0) = 2x\varphi(3x) + \psi(3x) = 0,$$

$$f(x, 1) = (2x + 1)\varphi(3x - 2) + \psi(3x - 2) = 1 - 9x^2.$$

Podstawmy w powyższych równaniach $\frac{x}{3}$ w miejsce x :

$$\frac{2x}{3}\varphi\left(\frac{3x}{3}\right) + \psi\left(\frac{3x}{3}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{2x}{3} + 1\right)\varphi\left(\frac{3x}{3} - 2\right) + \psi\left(\frac{3x}{3} - 2\right) = 1 - 9\left(\frac{x}{3}\right)^2,$$

skąd

$$(12) \quad \frac{2x}{3}\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

$$(13) \quad \left(\frac{2x}{3} + 1\right)\varphi(x - 2) + \psi(x - 2) = 1 - x^2.$$

Podstawmy jeszcze w równaniu (13) $x + 2$ w miejsce x :

$$\left(\frac{2(x+2)}{3} + 1\right)\varphi((x+2) - 2) + \psi((x+2) - 2) = 1 - (x+2)^2,$$

skąd

$$(14) \quad \frac{2x+7}{3}\varphi(x) + \psi(x) = 1 - (x+2)^2.$$

Odejmując stronami od równania (14) równanie (12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}\varphi(x) &= 1 - (x+2)^2, \\ \varphi(x) &= \frac{3}{7}(1 - (x+2)^2). \end{aligned}$$

Korzystając z (12) obliczamy

$$\psi(x) = -\frac{2}{3}x\varphi(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}x(1 - (x+2)^2) = -\frac{2}{7}x(1 - (x+2)^2).$$

Wstawiając tak wyznaczone φ, ψ do równania (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2x + y)\varphi(3x - 2y) + \psi(3x - 2y) = \\ &= (2x + y) \cdot \frac{3}{7}(1 - (3x - 2y + 2)^2) - \frac{2}{7}(3x - 2y)(1 - (3x - 2y + 2)^2), \end{aligned}$$

skąd po dokonaniu uproszczeń

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y(1 - (3x - 2y + 2)^2), \\ f(x, y) &= -9x^2y + 12xy^2 - 12xy - 3y - 4y^3 + 8y^2. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $f(x, y)$ spełnia równanie (7) wraz z warunkami (10) oraz (11).

Jedną z częściej stosowanych zamian zmiennych jest przejście do współrzędnych biegunowych.

Przykład 4. Wyrażenie

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

zwane jest *laplasjanem* funkcji $f(x, y)$ (równanie $\Delta f = 0$ nazywamy *równaniem Laplace'a*). Rozpatrując laplasjan Δf w obszarze D rozłącznym z osią x zapisać go w współrzędnych biegunowych.

Wprowadzamy współrzędne biegunowe

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

i obliczamy

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{y}{x} = \frac{r \cos \varphi}{r \sin \varphi} = \tan \varphi,$$

skąd

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Powyższe związki różniczkujemy względem x i y :

$$(15) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi,$$

$$(16) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi,$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

Ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$(19) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Uwzględniając (15), (17) otrzymujemy

$$(20) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Podstawmy w powyższym wzorze w miejsce f wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Stosujemy jeszcze raz wzór (20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \left(-\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} \right) + \\ &\quad + \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych oraz uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy stąd

$$(21) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Obliczmy teraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Ze wzorów na pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

skąd po uwzględnieniu wzorów (16), (18)

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Podstawmy w powyższym wzorze $\frac{\partial f}{\partial y}$ w miejsce f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{(22)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \stackrel{(22)}{=} \\ &= \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \\ &\quad + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \sin \varphi \left(\sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \right) + \\ &\quad + \frac{\cos \varphi}{r} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych oraz uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy stąd

$$(23) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Dodając teraz stronami wzory (21) i (23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned}$$