Zestaw 22

Transformata Laplace'a

1. Dla podanych funkcji $f(t)$ wyznaczyć transformaty Laplace'a $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

a) t^2, b) t^5, c) $\cos 2t$, d) $\sin 4t$, e) e^{-3t}, f) $t^2\,\mathrm{e}^t$, g) $t^4\,\mathrm{e}^{-t}$, h) $t^3\,\mathrm{e}^{5t}$, i) $t^5\,\mathrm{e}^{-3t}$, j) $\mathrm{e}^t \sin 2t$,
k) $\mathrm{e}^{-t}\cos t$, l) $\mathrm{e}^{2t}\sin 5t$, m) $\mathrm{e}^{-3t}\cos t$, n) $3t^2 - 4\sin 3t$, o) $2 - 5t^3 + t^2\cos t - 3\,\mathrm{e}^t \sin 2t$.

2. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

a) $\dfrac{1}{s+1}$, b) $\dfrac{1}{s-2}$, c) $\dfrac{1}{s^3}$, d) $\dfrac{1}{(s-1)^2}$, f) $\dfrac{-1}{(s-2)^2}$, g) $\dfrac{1}{(s-4)^3}$, h) $\dfrac{1}{(s+2)^4}$, i) $\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}$,
j) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$, k) $\dfrac{s}{s^2+9}$, l) $\dfrac{s}{s^2+4s+5}$, m) $\dfrac{s-7}{s^2-14s+50}$, n) $\dfrac{s+9}{s^2+6s+13}$, o) $\dfrac{2}{s^3-s^2+s-1}$,
p) $\dfrac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$.

3. Metodą transformaty Laplace'a rozwiązać zagadnienia początkowe:

a) $y' - y = 1,\ y(0) = 1$; b) $y' - y = t,\ y(0) = 0$; c) $y' + y = e^t,\ y(0) = \frac{1}{2}$;
d) $y' - 2y = \sin t,\ y(0) = 0$; e) $y' - y = 2t\,\mathrm{e}^t,\ y(0) = 0$; f) $y' - 2y = t\,\mathrm{e}^{2t},\ y(0) = 0$;
g) $y' - 3y = 27t^2,\ y(0) = -1$; h) $y' + 2y = 8t^3,\ y(0) = 2$.

4. Metodą transformaty Laplace'a rozwiązać zagadnienia początkowe:

a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x,\ y(0) = y'(0) = 0$; b) $y'' - 6y' + 25y = 290\sin 3x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 32$;
c) $y'' + 4y = 3\sin x,\ y(0) = y'(0) = 0$; d) $y'' + 2y' = \mathrm{e}^{-2x},\ y(0) = y'(0) = 1$;
e) $y'' + 5y' + 6y = 20\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$; f) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 7,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;
g) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$; h) $y'' - y' - 6y = -6x^3 - 3x^2 - 1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$;
i) $y'' + 4y' + 5y = 10\,\mathrm{e}^x,\ y(0) = y'(0) = 0$; j) $y'' - 9y = 8x\,\mathrm{e}^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

5. Metodą transformaty Laplace'a rozwiązać zagadnienia początkowe:

a) $y''' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$; b) $y''' - 2y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$;
c) $y''' - 4y'' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 16$; d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;
e) $y''' - 27y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 9$; f) $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

Tabela transformat Laplace'a

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$t^n\,\mathrm{e}^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
0	0	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+)$, $f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$							