

[11] *A characterization of Banach spaces containing l^1* , Proc. Nat. Acad. U.S.A. 71 (1974), pp. 2411–2413.

[12] *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), pp. 803–831.

G. Schechtman

[1] *Examples of L_p spaces ($1 < p \neq 2 < \infty$)*, Israel J. Math. 19 (1974), pp. 220–224.

[2] *On Pełczyński's paper "Universal bases"*, ibid. 22 (1975), pp. 181–184.

R. Schneider

[1] *Equivariant endomorphisms of the space of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), pp. 53–78.

C. P. Stegall

[1] *Banach spaces whose duals contain $l^1(\Gamma)$ with applications to the study of dual $L_1(\mu)$ spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1976), pp. 463–477.

[2] *The Radon Nikodym property in conjugate Banach spaces*, ibid. 206 (1975), pp. 213–223.

A. Szankowski

[2] *Subspaces without the approximation property*, Israel J. Math. 30 (1978), pp. 123–129.

[3] *A Banach lattice without the approximation property*, ibid. 24 (1976), pp. 329–337.

[4] *$B(H)$ does not have the approximation property*, to appear.

M. Talagrand

[1] *Espaces de Banach Faiblement K -analytiques*, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, Exposés XII–XIII, École Polytechnique, Palaiseau 1977–1978.

H. Toruńczyk

[6] *Characterizing a Hilbert space topology*, preprint 143, Institute of Math. Polish Acad. Sci.

W. A. Veech

[1] *Short proof of Sobczyk's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), pp. 627–628.

J. Wolfe

[1] *Injective Banach spaces of type $C(T)$* , Israel J. Math. 18 (1974), pp. 133–140.

M. Zippin

[3] *The separable extension problem*, Israel J. Math. 26 (1977), pp. 372–387.

TRAVAUX DE STEFAN BANACH

Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*

publié dans *Fund. Math.* 3 (1922), p. 133-181.

Introduction. L'opération c'est une relation univoque yRx c'est-à-dire, telle que

$$yRx \text{ et } zRx \text{ entraîne } y = z$$

pour tout x, y, z .

Chaque relation yRx comporte un *contre-domaine* (c'est la réserve des y) et un *domaine* (la réserve des x) ou *champ*. L'opération fonctionnelle ou la fonction de ligne c'est une opération dont le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de fonctions.

La notion de fonction de ligne fut introduite par M. Volterra. Des recherches à ce sujet ont été faites par MM. Fréchet, Hadamard, F. Riesz, Pincherle, Steinhaus, Weyl, Lebesgue et par beaucoup d'autres. Dans les premiers ouvrages on admettait que le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de fonctions continues admettant les dérivées d'ordres supérieurs. Ce ne furent que les travaux de Hilbert qui, bien qu'ils traitaient les formes quadratiques à une infinité de variables et non pas les fonctions de ligne, ont apporté des résultats susceptibles à être transférés facilement sur les théorèmes concernant les opérations dont le domaine et le contre-domaine se composent des fonctions de carré intégrable (L).

M. Wilkosz et moi, nous avons certains résultats (que nous nous proposons publier plus tard) sur les opérations dont les domaines sont des ensembles de fonctions duhameliennes, c'est-à-dire, qui sont les dérivées de leurs fonctions primitives.

L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines

* Thèse présentée en juin 1920 à l'Université de Léopol pour obtenir le grade de docteur en philosophie.

propriétés, j'en deduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.

J'ai introduit pour plus de simplicité les notations suivantes de quelques champs fonctionnels:

L'ensemble de fonctions continues	(\mathcal{C})
L'ensemble de fonctions sommables (intégrables au sens de Lebesgue)	(\mathcal{S})
L'ensemble de fonctions intégrables (L) avec la $r^{\text{ième}}$ puissance	(\mathcal{S}^r)
L'ensemble de fonctions mesurables bornées	(\mathcal{M})
L'ensemble de fonctions duhameliennes bornées	(\mathcal{D})
L'ensemble de fonctions ayant la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée absolument continue et la $p^{\text{ième}}$ dérivée continue	($\mathcal{C}^p \mathcal{C}$)
intégrable (L)	($\mathcal{C}^p \mathcal{S}$)
intégrable (L) avec la $r^{\text{ième}}$ puissance	($\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r$)
bornée	($\mathcal{C}^p \mathcal{M}$)
duhamelienne	($\mathcal{C}^p \mathcal{D}$)

Je passe aux postulats concernant les ensembles traités dans cet ouvrage.

I

§ 1. **Axiomes et définitions fondamentales.** Soit E une classe composée tout au moins de deux éléments, d'ailleurs arbitraires, que nous désignerons p. ex. par X, Y, Z, \dots

a, b, c désignant les nombres réels quelconques, nous définissons pour E deux opérations suivantes:

1) l'addition des éléments de E

$$X + Y, X + Z, \dots$$

2) la multiplication des éléments de E par un nombre réel

$$aX, bY, \dots$$

Admettons que les propriétés suivantes sont réalisées*:

I₁. $X + Y$ est un élément bien déterminé de la classe E ,

I₂. $X + Y = Y + X$,

I₃. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,

I₄. $X + Y = X + Z$ entraîne $Y = Z$,

I₅. Il existe un élément de la classe E déterminé θ et tel qu'on ait toujours $X + \theta = X$,

* Certains de ces axiomes sont superflus. On peut omettre par exemple les axiomes I₇, I₈, I₉ (note de la Rédaction).

I₆. $a \cdot X$ est un élément bien déterminé de la classe E ,

I₇. $a \cdot X = \theta$ équivaut à $X = \theta$ ou $a = 0$,

I₈. $a \neq 0$ et $a \cdot X = a \cdot Y$ entraînent $X = Y$,

I₉. $X \neq \theta$ et $a \cdot X = b \cdot X$ entraînent $a = b$,

I₁₀. $a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y$,

I₁₁. $(a + b) \cdot X = a \cdot X + b \cdot X$,

I₁₂. $1 \cdot X = X$,

I₁₃. $a \cdot (b \cdot X) = (a \cdot b) \cdot X$.

Nous introduisons en même temps les définitions suivantes:

(a) $-X = (-1) \cdot X$,

(b) $X - Y = X + (-1) \cdot Y$.

Toutes les règles algébriques des signes $+$, $-$ et de la multiplication (d'un élément de E par un nombre) restent valables pour un système E . Comme exemples d'un tel système peuvent servir: les vecteurs, les formes de Grassman, les quaternions, les nombres complexes etc.

Admettons ensuite que

II. Il existe une opération appelée norme (nous la désignerons par le symbole $\|X\|$), définie dans le champ E , ayant pour contre-domaine l'ensemble de nombres réels et satisfaisant aux conditions suivantes:

II₁. $\|X\| \geq 0$,

II₂. $\|X\| = 0$ équivaut à $X = \theta$,

II₃. $\|a \cdot X\| = |a| \cdot \|X\|$,

II₄. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$,

III. Si 1° $\{X_n\}$ est une suite d'éléments de E , 2° $\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \|X_r - X_p\| = 0$,

il existe un élément X tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\| = 0.$$

Nous introduisons les définitions suivantes où X, X_n, Y, Y_n désignent des éléments de E .

Définition 1. Nous dirons que la suite $\{X_n\}$ tend vers X suivant la norme, ce que nous écrivons

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X,$$

lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\| = 0.$$

Définition 2. Nous dirons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est *convergente suivant la norme vers X*, ce que nous écrirons

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty} X_n} = X,$$

lorsque

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^v X_n - X \right\| = 0.$$

§ 2. Théorèmes auxiliaires sur les normes et les limites.

THÉORÈME 1. $\|X - Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Démonstration. On a en vertu de II:

$$\|X - Y\| = \|X + (-1) \cdot Y\| \leq \|X\| + \|(-1) \cdot Y\| = \|X\| + |-1| \cdot \|Y\|,$$

c'est-à-dire,

$$\|X - Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

THÉORÈME 2. $\|X - Y\| \geq \|X\| - \|Y\|$.

On a en vertu de II:

$$\|X\| = \|(X - Y) + Y\| \leq \|X - Y\| + \|Y\|.$$

LEMME 1. $|||X| - |Y||| \leq \|X - Y\|$.

LEMME 2. Lorsque $\|X - Y\| < \varepsilon$, on a $\|Y\| - \varepsilon \leq \|X\| \leq \|Y\| + \varepsilon$.

LEMME 3. Lorsque $\|X - Y\| = 0$, on a $X = Y$.

THÉORÈME 3. $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \|X_n\|$.

On peut prouver aisément ce théorème par l'induction complète, en s'appuyant sur l'axiome II.

Les théorèmes qui précèdent nous montrent que la norme joue un rôle analogue à celui de la valeur absolue dans le champ des nombres réels.

Je passe maintenant à quelques théorèmes concernant les limites.

THÉORÈME 4. *Étant donnés*

1° Une suite d'éléments $\{X_n\}$,

2° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$,

3° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = Y$,

on a

$$X = Y.$$

Démonstration.

$$\|X - Y\| = \|(X - X_n) + (X_n - Y)\|.$$

On a en vertu de l'axiome II

$$\|(X - X_n) + (X_n - Y)\| \leq \|X - X_n\| + \|X_n - Y\|,$$

c'est-à-dire,

$$(1) \quad \|X - Y\| \leq \|X - X_n\| + \|X_n - Y\|.$$

Mais, en vertu des hypothèses 2°, 3° et de la définition 1, le membre droit de l'inégalité (1) peut être fait aussi petit que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand. Il en résulte que

$$\|X - Y\| = 0 \quad \text{donc} \quad X = Y, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque. Ce théorème dit que lorsqu'une suite admet une limite, elle la détermine d'une façon univoque. Un théorème analogue, que je n'énonce pas ici, peut être démontré pour les séries.

THÉORÈME 5. Lorsque $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\| = \|X\|$.

Démonstration. On a en vertu du lemme 1:

$$|\|X_n\| - \|X\|| \leq \|X_n - X\|.$$

Comme par hypothèse et selon définition 1 le membre droit de cette inégalité tend vers 0 avec $1/n$, le membre gauche tend également vers 0, ce qui entraîne précisément notre théorème.

LEMME 4. Si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, il existe un nombre positif m tel qu'on ait

1) $\|X_n\| \leq m$ pour chaque n naturel,

2) $\|X\| \leq m$.

THÉORÈME 6. Lorsque

1° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$,

2° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$,

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

4° $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$,

on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot X_n + b_n \cdot Y_n) = a \cdot X + b \cdot Y.$$

Démonstration. On a en vertu de l'axiome II:

$$(2) \quad \|(a \cdot X + b \cdot Y) - (a_n \cdot X_n + b_n \cdot Y_n)\| \leq \|a \cdot X - a_n \cdot X_n\| + \|b \cdot Y - b_n \cdot Y_n\|.$$

Mais

$$\|a \cdot X - a_n \cdot X_n\| = \|(a - a_n) \cdot X + a_n (X - X_n)\|,$$

d'où

$$(3) \quad \|a \cdot X - a_n \cdot X_n\| \leq \|(a - a_n) \cdot X\| + \|a_n \cdot (X - X_n)\|.$$

En vertu de II₃ et (3):

$$\|a \cdot X - a_n \cdot X_n\| \leq |a - a_n| \cdot \|X\| + |a_n| \cdot \|X - X_n\|,$$

ce qui donne par hypothèse 1°, 3°:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a \cdot X - a_n \cdot X_n\| = 0.$$

On prouve d'une façon analogue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b \cdot Y - b_n \cdot Y_n\| = 0.$$

L'inégalité (2) donne, par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(a \cdot X + b \cdot Y) - (a_n \cdot X_n + b_n \cdot Y_n)\| = 0,$$

ce qui implique notre théorème en vertu de la définition 1.

THÉORÈME 7. Lorsque dans une suite $\{X_n\}$ on a pour tout n : $X_n = X$, on a aussi: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$.

La démonstration résulte immédiatement de la remarque que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta\| = 0.$$

THÉORÈME 8. Lorsque

1° $\{X_n\}$ est une suite d'éléments,

2° $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|$ existe,

la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est convergente suivant la norme.

Démonstration. Posons $S_r = \sum_{n=1}^r X_n$. En admettant que $p > q$, on a

$$(4) \quad \|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{n=q+1}^p X_n \right\| \leq \sum_{n=q+1}^p \|X_n\|.$$

Mais par hypothèse 2°:

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \sum_{n=q+1}^p \|X_n\| = 0,$$

il résulte donc de l'inégalité (4) que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \|S_p - S_q\| = 0,$$

ce qui prouve, en vertu de l'axiome III et selon définition 1, la convergence de la suite $\{S_p\}$. Or, la convergence de la suite $\{S_p\}$ est, selon définition 2, équivalente à celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

LEMME 5. Une suite d'éléments $\{X_n\}$ et une suite de nombres $\{a_n\}$ possédant les propriétés suivantes:

1° Il existe un nombre $m > 0$ tel que l'inégalité $\|X_n\| \leq m$ subsiste pour tout n naturel;

2° La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente;

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot X_n$ est convergente suivant la norme.

La démonstration résulte des considérations suivantes. On a:

$$\|a_n \cdot X_n\| = |a_n| \cdot \|X_n\| \leq |a_n| \cdot m.$$

Or, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et inégalité obtenue tout à l'heure

impliquent que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \cdot X_n\|$ est convergente, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot X_n$ en vertu du théorème précédent.

THÉORÈME 9. Pour que la suite $\{X_n\}$ soit convergente suivant la norme, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \|X_p - X_q\| = 0.$$

Démonstration. L'axiome III et la définition 1 impliquent que la condition est suffisante. Il reste à démontrer qu'elle est nécessaire.

Posons

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X.$$

Nous aurons donc

$$(5) \quad \|X_p - X_q\| = \|(X_p - X) + (X - X_q)\| \leq \|X_p - X\| + \|X - X_q\|,$$

et comme, par hypothèse,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|X_p - X\| = 0, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \|X - X_q\| = 0,$$

la formule (5) implique que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \|X_p - X_q\| = 0.$$

LEMME 6. Pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ soit convergente, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \|R_{p,q}\| = 0$$

où $p > q$ et $R_{p,q} = \sum_{n=q+1}^p X_n$.

§ 3. Définition et théorèmes sur les ensembles. Définition 3. X_1 désignant un élément de E et r un nombre positif, l'ensemble de tous les éléments (X) qui satisfont à l'inégalité $\|X - X_1\| \leq r$ est dit *sphère*. L'élément X_1 sera appelé *centre* et r — *rayon* de la sphère. Nous la désignerons par le symbole $K(X_1, r)$.

(Dans ce paragraphe, ainsi que dans les suivants, nous emploierons souvent l'expression „point” au lieu d'„élément”).

On dit qu'un point X est situé à l'intérieur de la sphère $K(X_1, r)$, lorsqu'il remplit l'inégalité $\|X - X_1\| < r$. On dit que la sphère K_1 est située dans la sphère K_2 lorsque tout point de la sphère K_2 est situé dans la sphère K_1 .

THÉORÈME 10. Étant données deux sphères: $K_1(X_1, r_1)$ et $K_2(X_2, r_2)$, l'inégalité

$$(7) \quad \|X_1 - X_2\| \leq r_1 - r_2$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la sphère K_2 soit située dans la sphère K_1 .

Démonstration. 1° La condition est suffisante. Admettons, en effet, que l'inégalité (7) est réalisée. X étant situé dans la sphère K_2 , on a, en vertu de la définition 3

$$(8) \quad \|X_2 - X\| \leq r_2,$$

par conséquent

$$\|X_1 - X\| = \|(X_1 - X_2) + (X_2 - X)\| \leq \|X_1 - X_2\| + \|X_2 - X\|,$$

d'où, en vertu de (7) et (8):

$$\|X_1 - X\| \leq r_1 - r_2 + r_2 = r_1.$$

On voit donc que le point X est situé dans la sphère K_1 .

2° La condition est nécessaire. Admettons, en effet, que chaque point de la sphère K_2 est situé dans la sphère K_1 et posons

$$\|X_1 - X_2\| = s.$$

Le centre X_2 étant situé dans la sphère K_1 , l'inégalité $\|X_1 - X_2\| \leq r_1$ est remplie en vertu de la définition 3; d'où

$$(9) \quad s \leq r_1.$$

Supposons que $s \neq 0$. En désignant par ε un nombre positif, d'ailleurs arbitraire, posons

$$X = X_1 + \frac{r_1 + \varepsilon}{s} (X_2 - X_1).$$

Par conséquent

$$\|X - X_1\| = \frac{r_1 + \varepsilon}{s} \cdot s = r_1 + \varepsilon > r_1$$

et X n'appartient pas à la sphère K_1 , donc non plus à la sphère K_2 . Or, dans ce cas X satisfait à l'inégalité

$$(10) \quad \|X - X_2\| > r_2,$$

mais

$$X - X_2 = (X_1 - X_2) + \frac{r_1 + \varepsilon}{s} (X_2 - X_1) = (X_2 - X_1) \frac{r_1 + \varepsilon - s}{s},$$

c'est-à-dire,

$$\|X - X_2\| = \|X_2 - X_1\| \cdot \left| \frac{r_1 + \varepsilon - s}{s} \right| = s \cdot \left| \frac{r_1 + \varepsilon - s}{s} \right| = r_1 + \varepsilon - s.$$

Comme, en vertu de (9), $r_1 \geq s$, on a:

$$\|X - X_2\| = r_1 + \varepsilon - s.$$

Cette égalité et l'inégalité (10) donnent:

$$r_2 < r_1 + \varepsilon - s,$$

d'où

$$s < r_1 - r_2 + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité subsiste pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

$$s \leq r_1 - r_2,$$

c'est-à-dire

$$\|X_1 - X_2\| \leq r_1 - r_2.$$

Nous avons établi cette relation en supposant que $s \neq 0$. Supposons maintenant que $s = 0$, c'est-à-dire que $X_1 = X_2$. Envisageons un élément arbitraire X pourvu qu'il soit distinct de X_2 , et soit

$$\|X - X_1\| = a, \quad \text{donc} \quad a \neq 0.$$

Posons

$$Y = X_1 + \frac{r_1 + \varepsilon}{a} (X - X_1),$$

où ε désigne un nombre positif, d'ailleurs quelconque. On a

$$\|Y - X_1\| = \frac{r_1 + \varepsilon}{a} \cdot \|X - X_1\| = \frac{r_1 + \varepsilon}{a} \cdot a = r_1 + \varepsilon > r_1.$$

Par conséquent le point Y n'appartient pas à la sphère K_1 , donc non plus à la sphère K_2 , c'est-à-dire,

$$\|Y - X_2\| > r_2$$

et comme $X_1 = X_2$, on a

$$r_1 + \varepsilon > r_2.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout ε , on a $r_1 \geq r_2$, c'est-à-dire, que $r_1 - r_2 \geq 0$. Mais, comme $X_1 = X_2$, on aura

$$\|X_1 - X_2\| \leq r_1 - r_2, \quad \text{c.q.f.d.}$$

LEMME 7. Lorsque la sphère $K_1(X_1, r_1)$ est contenue dans $K_2(X_2, r_2)$, on a l'inégalité $r_1 \leq r_2$.

LEMME 8. Lorsque la sphère $K_1(X_1, r_1)$ est contenue dans la sphère $K_2(X_2, r_2)$ et la sphère K_2 est contenue dans la sphère K_1 , on a

$$X_1 = X_2 \quad \text{et} \quad r_1 = r_2.$$

Remarque. Le lemme précédent peut s'énoncer d'une manière différente, à savoir: chaque sphère n'a qu'un seul centre et un seul rayon.

THÉORÈME 11. 1° $\{K_n(X_n, r_n)\}$ étant une suite de sphères,

2° la sphère K_n contenant K_{n+1} pour chaque n ,

il existe une limite de la suite $\{X_n\}$ et elle appartient à toutes les sphères simultanément.

Démonstration. L'hypothèse 2° et le lemme 7 impliquent que

$$r_n \geq r_{n+1}$$

quel que soit n . Les termes de la suite $\{r_n\}$ ne vont donc jamais en croissant, ce qui entraîne la convergence absolue de la série

$$(11) \quad r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n+1} - r_n).$$

Mais on a en vertu du théorème 9 et de l'hypothèse 2°:

$$(12) \quad \|X_{n+1} - X_n\| \leq r_n - r_{n+1}.$$

La convergence absolue de la série (11) et l'inégalité (12) impliquent la convergence de la série

$$(13) \quad \|X_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|X_{n+1} - X_n\|.$$

La série (13) étant convergente, on conclut du théorème 8 que la série

$$(14) \quad X_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (X_{n+1} - X_n)$$

est convergente suivant la norme.

S_n désignant la somme de n premiers termes de la série (14), on a $S_n = X_n$, et la suite $\{X_n\}$ est par conséquent convergente suivant la norme.

Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$.

J'affirme que le point X appartient simultanément à toutes les sphères. Remarquons pour le prouver qu'en supposant $n < p$, on aura les inégalités suivantes:

$$\|X_n - X\| = \|X_n - X_p + X_p - X\| \leq \|X_n - X_p\| + \|X_p - X\|.$$

Mais, comme la sphère K_p est contenue par hypothèse dans la sphère K_n , il résulte du théorème 9 que

$$\|X_n - X\| \leq r_n - r_p + \|X_p - X\|,$$

c'est-à-dire,

$$\|X_n - X\| \leq r_n + \|X_p - X\|.$$

Or, l'expression $\|X_p - X\|$ peut être faite, en vertu de la convergence de la suite $\{X_n\}$, aussi petite que l'on veut. Il suffit, en effet, de choisir p assez grand.

Ainsi

$$\|X_n - X\| \leq r_n$$

et on en conclut en vertu de la définition 3 que X appartient à la sphère K_n , c.q.f.d.

Nous introduirons à présent quelques définitions.

Définition. A étant un ensemble d'éléments qui appartiennent à E , je dis que X est un point d'accumulation de l'ensemble A , lorsque pour tout nombre $r > 0$, il existe dans la sphère $K(X, r)$ au moins un élément de l'ensemble A , distinct de X .

J'appelle dérivé de l'ensemble A l'ensemble de points d'accumulation de A .

L'ensemble A est fermé, lorsqu'il contient son dérivé.

L'ensemble A est parfait, lorsqu'il est égal à son dérivé.

L'ensemble B est dense dans l'ensemble A , lorsque chaque sphère qui contient à l'intérieur un point de A , contient en même temps au moins un point de B (B étant contenu dans A).

Remarque. Ces définitions impliquent que l'ensemble E est parfait.

THÉORÈME 12. L'ensemble non vide A de tous les points communs à une infinité dénombrable d'ensembles fermés $\{A_n\}$ est fermé.

Démonstration. X étant un point d'accumulation de l'ensemble A , on trouve à l'intérieur de la sphère $K(X, r)$, quel que soit $r > 0$, au moins un point appartenant à A , donc à A_n . Par conséquent, X est en même temps un point d'accumulation de A , et, comme A est fermé par hypothèse, X appartient à A_n . Cette propriété étant réalisée pour tout n , X est commun à tous les A_n ; X appartient donc à A .

THÉORÈME 13. A étant un ensemble fermé et X un point qui n'appartient pas à A , il existe une sphère $K(X, r)$ de centre X n'ayant avec A aucun point commun.

Démonstration. En effet, en supposant qu'une telle sphère n'existe pas, on trouverait dans toute sphère $K(X, r)$ au moins un point de l'ensemble A . X serait donc un point d'accumulation de l'ensemble A et, comme A est fermé, X appartiendrait à A , contrairement à l'hypothèse.

§ 4. Nous allons maintenant envisager les opérations dont le domaine est contenu dans E et le contre-domaine dans un ensemble E_1 , satisfaisant également aux axiomes énumérés dans § 1.

Par cela nous n'admettons, bien entendu, nullement que l'ensemble E est égal à l'ensemble E_1 . Les éléments de l'ensemble E_1 peuvent être tout à fait différents de ceux de l'ensemble E . Il faudrait, à vrai dire, introduire une nouvelle notation pour l'addition et la multiplication par un nombre et pour la norme dans l'ensemble E_1 ; mais dans la suite de notre exposé une erreur étant exclue, nous allons maintenir la notation précédente. Il est clair que les théorèmes, qui ont été démontrés pour l'ensemble E , restent valables également pour l'ensemble E_1 . Nous désignerons des opérations par $F(X)$, $P(X)$ etc.

Définition. L'opération $F(X)$ est continue pour un point X_0 relativement à un ensemble A , lorsque

1° $F(X)$ est défini pour chaque point de l'ensemble A ,

2° X_0 appartient à A et est son point d'accumulation,

3° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = F(X_0)$ toutes les fois que la suite X_n est contenue dans A et $\lim X_n = X_0$.

THÉORÈME 14. $F_1(X)$ et $F_2(X)$ désignant deux opérations continues pour le point X_0 relativement à un ensemble A et a_1 et a_2 étant deux nombres réels, d'ailleurs quelconques, l'opération

$$F(X) = a_1 \cdot F_1(X) + a_2 \cdot F_2(X)$$

est continue pour le point X_0 relativement à l'ensemble A .

La démonstration résulte du théorème 6.

THÉORÈME 15. Deux énoncés suivants sont équivalents:

1° $F(X)$ est continu pour le point X_0 relativement à l'ensemble A ,

2° $F(X)$ est défini dans A , X_0 appartient à A et en est un point

d'accumulation; pour tout nombre positif ε on peut trouver un tel $r > 0$ que l'oscillation de l'opération $F(X)$ dans la sphère $K(X_0, r)$ relativement à un ensemble A n'est pas supérieure à ε .

Remarque. L'oscillation de l'opération $F(X)$ dans une sphère K relativement à un ensemble A c'est le plus petit nombre Δ satisfaisant à l'inégalité

$$\|F(X_1) - F(X_2)\| \leq \Delta$$

pour tous X_1 et X_2 qui appartiennent à l'ensemble A et à la sphère K simultanément.

Démonstration. Admettons que l'énoncé 1° est vérifié. Si l'énoncé 2° était faux, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite de nombres positifs $\{r_n\}$ satisfaisant aux conditions:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0;$$

2) Dans chaque sphère $K_n(X, r_n)$ il existe tout au moins deux points $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ qui appartiennent à A et remplissent l'inégalité

$$(*) \quad \|F(X_n^{(1)}) - F(X_n^{(2)})\| \geq \varepsilon.$$

Or, $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$, qui sont situés dans la sphère $K_n(X_0, r_n)$, satisfont aux inégalités

$$\|X_0 - X_n^{(1)}\| \leq r_n \quad \text{et} \quad \|X_0 - X_n^{(2)}\| \leq r_n$$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, on a $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n^{(1)} = X_0$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n^{(2)} = X_0$. On en conclut par l'hypothèse de continuité de $F(X)$ pour le point X_0 que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(X_n^{(1)}) = F(X_0) \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(X_n^{(2)}) = F(X_0).$$

On peut donc choisir n de façon que les relations

$$\|F(X_n^{(1)}) - F(X_0)\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad \text{et} \quad \|F(X_n^{(2)}) - F(X_0)\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

soient réalisées simultanément. Il en résulte que

$$\|F(X_n^{(1)}) - F(X_n^{(2)})\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

ce qui est en contradiction avec (*). On voit ainsi que l'énoncé 1° entraîne 2°.

Admettons maintenant que c'est l'énoncé 2° qui est vérifié. Il s'agit de prouver que pour toute suite $\{X_n\}$ contenue dans A et telle que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0$, on a

$$F_n(X) = F(X_0).$$

Prenons dans ce but un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$. Il existe en vertu de 2° un tel $r > 0$ que l'oscillation de l'opération $F(X)$ dans la sphère $K(X_0, r)$ n'est pas supérieure à ε .

Cependant, comme on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X_0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X_0\| = 0,$$

il existe un nombre $N > 0$ tel que l'inégalité

$$\|X_n - X_0\| < r$$

subsiste pour tout $n > N$. Il en résulte d'après notre hypothèse sur r que

$$\|F(X_n) - F(X_0)\| \leq \varepsilon.$$

On voit donc que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = F(X_0)$, c.q.f.d.

LEMME 9. Si l'opération $F(X)$ est continue pour le point X_0 relativement à l'ensemble A , il existe une sphère $K(X_0, r)$ dans laquelle l'opération $F(X)$ relativement à l'ensemble A est bornée (c'est-à-dire, qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout X appartenant à la fois à la sphère $K(X_0, r)$ et l'ensemble A on a l'inégalité $\|F(X)\| \leq M$).

THÉORÈME 16. Lorsque

1° l'opération $F(X)$ est continue relativement à l'ensemble A pour tout les points de A ,

2° l'ensemble A est fermé,

3° m et p sont deux nombres positifs où $m \geq p$,

l'ensemble L de points X de A qui satisfont à l'inégalité

$$m \geq \|F(X)\| \geq p$$

est vide ou fermé.

Démonstration. Supposons que L n'est pas vide et soit X_0 un point d'accumulation de l'ensemble L . Dans chaque sphère $K(X_0, r)$ il existe donc au moins un élément de l'ensemble L distinct de X_0 . L'ensemble L étant contenu dans A , X_0 est un point d'accumulation de l'ensemble A et, en vertu de l'hypothèse 2°, X_0 appartient à A .

Il en résulte, suivant l'hypothèse 1°, que l'opération $F(X)$ est continue pour le point X_0 relativement à l'ensemble A . Le théorème 15 implique donc l'existence d'une sphère $K(X_0, r)$ dans laquelle l'oscillation de l'opération $F(X)$ relativement à l'ensemble A ne dépasse pas ε , où ε désigne un nombre positif donné à l'avance.

Or, comme il existe dans la sphère $K(X_0, r)$ au moins un point qui appartient à la fois à A et à L (désignons-le par X'), on a

$$\|F(X_0) - F(X')\| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire,

$$\|F(X')\| + \varepsilon \geq \|F(X_0)\| \geq \|F(X')\| - \varepsilon.$$

Comme, d'autre part, X' appartient à L , on a l'inégalité :

$$m \geq \|F(X')\| \geq p,$$

d'où

$$m + \varepsilon \geq \|F(X_0)\| \geq p - \varepsilon.$$

Cette inégalité subsiste pour chaque ε , par conséquent

$$m \geq \|F(X_0)\| \geq p.$$

Nous allons introduire les définitions suivantes :

Définition. L'opération $F(X)$ sera dite *uniformément continue relativement à l'ensemble A* , lorsque

1° $F(X)$ est défini pour chaque point de cet ensemble;

2° Pour tout nombre positif ε on peut trouver un $m > 0$ tel que, X et X' étant deux éléments quelconques de A , l'inégalité $\|X - X'\| \leq m$ entraîne

$$\|F(X) - F(X')\| \leq \varepsilon.$$

Il est évident qu'une opération *uniformément continue* relativement à un ensemble A est en même temps *continue* relativement à cet ensemble. Cependant la réciproque n'est pas vraie.

Définition. Nous dirons qu'une suite d'opérations $\{F_n(X)\}$ définies dans un ensemble A tend suivant la norme vers une opération $F(X)$ définie dans l'ensemble A , lorsque chaque X qui appartient à A vérifie la relation

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X).$$

Définition. Nous dirons qu'une opération $F(X)$ définie dans un ensemble A est, relativement à cet ensemble, de *première classe de Baire*, lorsqu'il existe une suite d'opérations $\{F_n(X)\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $F_n(X)$ est pour chaque n continu relativement à l'ensemble A .

2° Pour chaque X , $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X)$.

Définition. Nous dirons qu'une opération $F(X)$ est *relativement à un ensemble A pantachiquement continue* lorsque

1° $F(X)$ est défini dans l'ensemble A ;

2° L'ensemble de points de continuité de l'opération $F(X)$ relativement à A est dense dans A .

THÉORÈME 17. Lorsqu'une opération $F(X)$ définie dans un ensemble E est de *première classe de Baire* relativement à cet ensemble, $F(X)$ est *pantachiquement continu* relativement à chaque ensemble parfait.

Démonstration. Il existe par hypothèse une suite d'opérations $\{F_n(X)\}$ continues dans E telle qu'on a pour tout X

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X).$$

Désignons par $A_{n,p}$ l'ensemble de points qui satisfont à l'inégalité

$$\|F_n(X) - F_{n+p}(X)\| \leq \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné.

Soit A un ensemble parfait choisi arbitrairement et A_n l'ensemble de points communs de $A, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots$. Comme ensemble de points communs d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, A_n est fermé en vertu du théorème 12.

A est la somme de $\{A_n\}$, puisque, si X appartient à A , il résulte de l'égalité $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X)$ et du théorème 9 qu'à partir d'un certain n l'inégalité (15) se trouve réalisée.

J'affirme maintenant qu'on peut trouver un n assez grand pour qu'il existe une sphère K qui contienne à l'intérieur des points de A et pour que tous les points communs de K et A , qui sont situés à l'intérieur de K , appartiennent à A_n .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on trouverait pour chaque n et dans chaque sphère K , contenant à l'intérieur des points de A , un tel point de A qui n'appartienne pas à A_n . Or, A_n étant fermé, on trouverait également — en vertu du théorème 13 — une sphère sans point commun avec A_n , mais contenant à l'intérieur des points de A .

Soit K_1 une sphère dont le centre X appartient à A et dont aucun point intérieur n'appartient à A_1 . Soit K_2 une sphère contenue dans l'intérieur de K_1 et telle que son centre X_2 appartienne à A sans qu'aucun de ses points appartienne à A_2 , et ainsi de suite. Or, on ne peut pas raisonner ainsi indéfiniment, car le point limite des centres de ces sphères (et une telle limite existerait en vertu du théorème 11) appartiendrait à K_1, K_2, \dots et à A , puisque A est parfait, en même temps ce point ne serait situé ni dans A_1 , ni dans A_2, \dots , ce qui est absurde, l'ensemble A étant la somme des $\{A_n\}$.

On peut par conséquent trouver un K contenant à l'intérieur des points de A et un n tel que les parties des ensembles A et A_n qui sont contenues à l'intérieur de la sphère K coïncident.

On a d'après (15) pour tout X appartenant à A_n :

$$\|F_n(X) - F(X)\| \leq \varepsilon;$$

donc, si K' est choisi à l'intérieur de K de façon que le centre de K' appartienne à A et qu'en outre, l'oscillation de l'opération $F_n(X)$ dans K' soit inférieure à ε , l'oscillation de $F(X)$ à l'intérieur de la sphère K' relativement à A est inférieure à 3ε .

Ceci établi, lorsqu'on a choisi arbitrairement une sphère K_0 qui contienne des points de A à l'intérieur, on peut trouver une suite de sphères $\{K_n\}$ telle que pour tout $n \geq 1$:

1° K_n soit situé à l'intérieur de K_{n-1} ;

2° Le centre de K_n appartienne à A ;

3° L'oscillation de $F(X)$ dans la sphère K_n relativement à l'ensemble A soit plus petite que $1/n$.

Ces conditions sont faites de façon que l'on puisse en remplir chacune après avoir rempli celles qui la précèdent. X désignant la limite de centres des sphères $\{K_n\}$, qui existe en vertu du théorème 11, on voit que X appartient à toutes les sphères K_n , ensuite que X appartient à A (puisque A est parfait) et enfin que $F(X)$ est continu pour le point X relativement à l'ensemble A [théorème 15]. Nous avons donc démontré que dans toute sphère qui contient des points de A à l'intérieur on trouve un élément de A , pour lequel $F(X)$ est continu relativement à A . Ainsi $F(X)$ est par définition pantachiquement continu relativement à l'ensemble A , c.q.f.d.

II

§ 1. Parmi les classes d'opérations c'est surtout celle des opérations dites *additives* qui mérite une attention spéciale. Nous n'envisageons dans ce chapitre que les opérations additives qui sont définies dans l'ensemble E tout entier.

Définition. On dit qu'une opération $F(X)$ est *additive*, lorsqu'on a pour tout X et Y :

$$F(X+Y) = F(X)+F(Y).$$

Il est évident que $F(\theta) = \theta$, car

$$F(\theta) = F(\theta+\theta) = 2F(\theta).$$

On démontre également sans peine que

$$F\left(\frac{p}{q} X\right) = \frac{p}{q} \cdot F(X),$$

où p et q désignent les nombres réels entiers et $q \neq 0$.

THÉORÈME 1. L'opération additive $F(X)$, bornée dans une sphère K , est continue pour chaque point du champ E .

Démonstration. Admettons que $F(X)$ est borné dans une sphère $K(X_0, r)$ et soit M la borne supérieure de $\|F(X)\|$ dans K , c'est-à-dire, que pour tout X' de K on ait constamment $\|F(X')\| \leq M$.

Désignons par X un élément arbitraire, par ε un nombre positif quelconque et par α un nombre rationnel qui remplisse l'inégalité

$$(1) \quad 0 < \alpha < \frac{r}{\|X\| + \varepsilon}.$$

Posons ensuite $Y = X_0 + \alpha \cdot X$.

Comme

$$\|Y - X_0\| = \|\alpha \cdot X\| = \|\alpha \cdot X\| < r,$$

l'élément Y appartient à la sphère $K(X_0, r)$.

L'hypothèse, admise sur la sphère K et sur M , implique que

$$\|F(Y) - F(X_0)\| \leq \|F(Y)\| + \|F(X_0)\| \leq 2M.$$

Or, comme

$$F(Y) - F(X_0) = F(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot F(X)$$

(où α est rationnel par hypothèse), on a

$$\|\alpha \cdot F(X)\| \leq 2M$$

et

$$\|F(X)\| \leq \frac{2M}{\alpha}.$$

Cette inégalité subsiste pour tout α rationnel qui satisfait à (1).

Par suite

$$\|F(X)\| \leq \frac{2M/r}{\|X\| + \varepsilon}, \quad \|F(X)\| \leq \frac{2M}{r} \cdot (\|X\| + \varepsilon).$$

La dernière inégalité subsiste pour chaque $\varepsilon > 0$; on a par conséquent

$$(2) \quad \|F(X)\| \leq \frac{2M}{r} \cdot \|X\|.$$

L'inégalité (2) est vraie pour chaque X . La suite $\{X_n\}$ tendant vers un X , d'ailleurs quelconque, on a en vertu de (2)

$$\|F(X - X_n)\| \leq \frac{2M}{r} \|X - X_n\|$$

et comme

$$F(X - X_n) = F(X) - F(X_n),$$

on en conclut que

$$\|F(X) - F(X_n)\| \leq \frac{2M}{r} \|X - X_n\|.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\| = 0,$$

par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(X_n) - F(X)\| = 0.$$

L'opération $F(X)$ est donc continue pour chaque point.

LEMME 1. L'opération additive $F(X)$ continue pour un point est continue pour tous les autres.

La démonstration se déduit du théorème précédent et du lemme 9, chapitre I.

LEMME 2. $F(X)$ étant une opération additive continue et a désignant un nombre réel, d'ailleurs quelconque, on a

$$F(a \cdot X) = a \cdot F(X).$$

LEMME 3. $F(X)$ étant une opération additive continue, il existe un nombre $M > 0$ tel que l'on ait pour chaque X :

$$\|F(X)\| \leq M \|X\|.$$

LEMME 4. Toute opération additive continue est bornée dans chaque sphère.

LEMME 5. Toute opération additive et continue dans E est en même temps uniformément continue dans E .

THÉORÈME 2. Toute opération $F(X)$ qui est

1° additive,

2° de première classe de Baire dans E ,

est continue.

Démonstration. $F(X)$ étant de première classe de Baire dans E , il existe en vertu du théorème 17 (chapitre I, § 2) un point, pour lequel cette opération relativement à E est continue. En vertu du lemme 1 cela implique la continuité de $F(X)$ pour chaque point.

THÉORÈME 3. Si

1° $F(X)$ est une opération additive pour chaque X ,

2° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ implique que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|F(X_n)\| \geq \|F(X)\|$,

l'opération $F(X)$ est continue.

Démonstration. Supposons que l'opération $F(X)$ n'est pas continue. En vertu du théorème 1, elle est donc non-bornée dans chaque sphère K . Or, X étant un élément quelconque, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $r > 0$ tel que tout X' situé dans la sphère $K(X, r)$ remplisse l'inégalité

$$(3) \quad \|F(X)\| \leq \|F(X')\| + \varepsilon.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite de nombres positifs $\{r_n\}$ qui présenteraient les propriétés:

a) $\lim r_n = 0$;

b) Dans chaque sphère $K(X, r_n)$ se trouve au moins un point X_n satisfaisant à l'inégalité

$$(4) \quad \|F(X)\| \geq \|F(X_n)\| + \varepsilon.$$

Cependant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X.$$

Il en résulte par l'hypothèse 2° que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|F(X_n)\| \geq \|F(X)\|,$$

contrairement à (4).

Ceci établi, on peut trouver pour toute suite arbitraire $\{M_n\}$ de nombres positifs assujettie à la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ et pour tout nombre positif ε , d'ailleurs quelconque, une suite de sphères $\{K_n(X_n, r_n)\}$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout n :

- 1) $\|F(X_n)\| \geq M_n$;
- 2) La sphère K_{n+1} est contenue dans la sphère K_n ;
- 3) Si X' est situé dans la sphère K_n , il satisfait à l'inégalité

$$\|F(X_n)\| \leq \|F(X')\| + \varepsilon.$$

X désignant l'élément appartenant à toutes les sphères à la fois (voir théorème 11, chapitre I), on a pour tout n en vertu de la condition 3):

$$\|F(X_n)\| \leq \|F(X)\| + \varepsilon,$$

d'où en vertu de la condition 1)

$$M_n \leq \|F(X)\| + \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité est impossible, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty$. La supposition que $F(X)$ n'est pas continu conduit donc à une contradiction.

THÉORÈME 4. Si

- 1° $F(X)$ est une opération additive;
- 2° $\{F_n(X)\}$ est une suite d'opérations continues dans E ;
- 3° L'inégalité $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|F_n(X)\| \geq \|F(X)\|$ subsiste pour chaque X ;
- 4° $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(X)\|$ est borné pour chaque X ,

l'opération $F(X)$ est continue.

Démonstration. Supposons que l'opération $F(X)$ n'est pas continue. En vertu du théorème 1 elle est donc discontinue à l'intérieur de la sphère

$K(\theta, 1)$. Il existe par conséquent une suite $\{X_n\}$ telle qu'on ait pour tout n : $\|X_n\| \leq 1$ et

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(X_n)\| = \infty.$$

L'hypothèse 3° implique qu'il existe pour tout X un nombre dépendant de X (nous le désignerons par $N(X)$) qui possède la propriété suivante: quel que soit n , l'inégalité $n \geq N(X)$ entraîne l'inégalité $\|F_n(X)\| \geq \|F(X)\| - 1$.

En outre, pour chaque X et pour tout n entier, il existe un tel nombre $m_n(X)$ que l'inégalité

$$\|X' - X\| < m_n(X)$$

entraîne inégalité

$$\|F_n(X')\| \geq \|F_n(X)\| - 1.$$

L'existence du nombre $m_n(X)$ résulte du théorème 15, chapitre I. Les nombres $N(X)$ et $m_n(X)$ étant ainsi définis, on trouve une suite de nombres positifs $\{a_i\}$ et une suite d'éléments $\{Y_i\}$ telles que les conditions suivantes soient remplies:

- 1° $a_1 = 1$,
- 2° $Y_1 = X_1$,
- 3° a_{i+1} est égal au plus petit de deux nombres:

$$\frac{1}{2}a_i, \quad \frac{1}{2}m_{N(S_i)}(S_i) \quad \text{où } S_i = \sum_{r=1}^i a_r Y_r,$$

4° Y_{i+1} est celui des éléments appartenant à $\{X_n\}$ et satisfaisant aux inégalités:

$$(a) \quad \|F(S_i)\| \leq \frac{1}{2}a_{i+1} \|F(X_n)\|,$$

$$(b) \quad i \leq \frac{1}{2}a_{i+1} \|F(X_n)\|,$$

dont l'indice dans la suite $\{X_n\}$ est le plus petit.

Ces conditions déterminent d'une façon univoque le nombre a_{i+1} et l'élément Y_{i+1} , lorsque les termes précédents de suites $\{a_i\}$ et $\{Y_i\}$ sont donnés. Il est à remarquer en même temps que nous pouvons toujours satisfaire à la condition 4°, les conditions (5) étant remplies.

Les conditions 1°-4° impliquent que

$$a_i \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot a_1,$$

car $a_{i+1} \leq \frac{1}{2}a_i$ en vertu de 3°.

Il en résulte selon 1° que

$$a_i \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1},$$

ce qui donne lieu à deux relations:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq 2 \quad \text{et} \quad \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r \leq 2a_{i+1},$$

d'où, en vertu de 3°:

$$(6) \quad \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r \leq m_{N(S_i)}(S_i).$$

Comme on a en vertu de (5) et de la condition 4°

$$\|a_i Y_i\| = a_i \cdot \|Y_i\| \leq a_i$$

et la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est convergente, la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i Y_i$ l'est également [théorème 8

et lemme 5, chapitre I].

Posons donc

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Y_i \quad \text{et} \quad R_i = \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r Y_r, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad R_i = X - S_i$$

et nous aurons

$$\|R_i\| = \left\| \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r Y_r \right\| \leq \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r \cdot \|Y_r\| \leq \sum_{r=i+1}^{\infty} a_r,$$

d'où, en vertu de (6):

$$(7) \quad \|R_i\| \leq m_{N(S_i)}(S_i).$$

Remarquons ensuite que

$$\|F(S_i)\| = \|F(S_{i-1} + a_i Y_i)\| = \|F(S_{i-1}) + a_i \cdot F(Y_i)\| \geq a_i \cdot \|F(Y_i)\| - \|F(S_{i-1})\|$$

donc, en vertu de la condition 4°(α),

$$\|F(S_i)\| \geq a_i \cdot \|F(Y_i)\| - \frac{1}{2} a_i \cdot \|F(Y_i)\|,$$

c'est-à-dire,

$$\|F(S_i)\| \geq \frac{1}{2} a_i \cdot \|F(Y_i)\|,$$

d'où, en vertu de la condition 4°(β):

$$(8) \quad \|F(S_i)\| > i - 1.$$

Par définition des nombres $N(S_i)$ et $m_{N(S_i)}(S_i)$, on a d'après (7):

$$\|F_{N(S_i)}(X)\| = \|F_{N(S_i)}(S_i + R_i)\| \geq \|F_{N(S_i)}(S_i)\| - 1 \geq \|F(S_i)\| - 1 - 1,$$

ce qui donne selon (8):

$$\|F_{N(S_i)}(X)\| \geq i - 1 - 1 - 1, \quad \text{d'où} \quad \|F_{N(S_i)}(X)\| \geq i - 3$$

et par suite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_{N(S_i)}(X)\| = \infty,$$

contrairement à l'hypothèse 4. La supposition que l'opération $F(X)$ est discontinue implique donc une contradiction.

THÉORÈME 5. Si

1° $\{F_n(X)\}$ est une suite d'opérations additives continues;

2° $F(X)$ est une opération additive;

3° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X)$,

on a:

1) L'opération $F(X)$ est continue;

2) Il existe un nombre $M > 0$ tel qu'on ait pour chaque n et X

$$\|F_n(X)\| \leq M \|X\|.$$

Démonstration. La continuité de l'opération additive $F(X)$ résulte de l'hypothèse 3°. En effet, comme limite des opérations continues, $F(X)$ est de première classe de Baire, ce qui entraîne selon le théorème 2, la continuité de $F(X)$.

Pour démontrer la thèse 2), désignons par M_n le plus petit nombre dépendant de n qui vérifie l'inégalité

$$(9) \quad \|F_n(X)\| \leq M_n \cdot \|X\|$$

quel que soit X .

L'existence d'un tel nombre est assurée par le lemme 3.

Il est évident que chaque nombre $M \geq M_n$ vérifie également l'inégalité (9). Par conséquent, si la suite de nombres $\{M_n\}$ est bornée, on aura pour chaque n et X :

$$\|F_n(X)\| \leq M \cdot \|X\|,$$

où M désigne la borne supérieure de cette suite et le théorème sera démontré.

Nous allons donc prouver qu'en effet la suite $\{M_n\}$ est bornée. Remarquons que M_n est la borne supérieure des valeurs que prend l'opération $\|F_n(X)\|$ dans la sphère définie par l'inégalité $\|X\| \leq 1$.

On en déduit qu'en désignant par ε un certain nombre positif, d'ailleurs arbitraire, on trouvera toujours une suite d'éléments $\{X_n\}$ qui remplissent les inégalités

$$(10) \quad \|X_n\| \leq 1$$

et

$$\|F_n(X_n)\| \geq M_n - \varepsilon$$

quel que soit n .

Si l'on suppose que la suite $\{M_n\}$ n'est pas bornée, on peut trouver deux suites de nombres $\{a_i\}$ et $\{r_i\}$ à propriétés suivantes:

- 1) $a_1 = 1$,
- 2) $r_1 = 1$,
- 3) a_{i+1} est égal au plus petit de deux nombres

$$\frac{1}{2} a_i \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{2(M_{r_i} + 1)},$$

4) r_{i+1} est le plus petit des nombres naturels qui remplissent les inégalités

- (α) $i \leq \frac{1}{2} a_{i+1} \|F_{r_{i+1}}(X_{r_{i+1}})\|,$
- (β) $i \leq \frac{1}{2} a_{i+1} M_{r_{i+1}},$
- (γ) $\|F_{r_{i+1}}(S_i)\| \leq \frac{1}{2} a_{i+1} M_{r_{i+1}},$

$$\text{où } S_i = \sum_{n=1}^i a_n X_{r_n}.$$

La possibilité de réaliser les conditions 1)-3) est manifeste. Quant à la condition 4), il suffit de remarquer qu'elle peut être réalisée en vertu de (9) et en vertu de notre supposition que la suite $\{M_n\}$ n'est pas bornée.

Tout comme dans le théorème précédent la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est convergente, car $a_i \leq (\frac{1}{2})^{i-1}$. Il en résulte que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_{r_i}$ est aussi convergente, puisqu'on a en vertu de (10)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i X_{r_i}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \|X_{r_i}\| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Posons donc

$$X = \sum_{i=r}^{\infty} a_i X_{r_i}.$$

Or, on a

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{i+1} (\frac{1}{2})^{n-1} = 2a_{i+1},$$

d'où, en vertu de la condition 3),

$$(11) \quad \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n \leq \frac{\varepsilon}{M_{r_i} + 1}.$$

En posant

$$\|R_i\| = \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n X_{r_n},$$

on aura donc

$$\|R_i\| = \left\| \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n X_{r_n} \right\| \leq \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n \cdot \|X_{r_n}\|,$$

d'où, en vertu de (11),

$$(12) \quad \|R_i\| \leq \frac{\varepsilon}{M_{r_i} + 1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|F_{r_{i+1}}(X)\| &= \|F_{r_{i+1}}(S_i + a_{i+1} \cdot X_{r_{i+1}} + R_{i+2})\| \\ &\geq \|F_{r_{i+1}}(a_{i+1} X_{r_{i+1}})\| - \|F_{r_{i+1}}(S_i + R_{i+2})\|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, que

$$(13) \quad \|F_{r_{i+1}}(X)\| \geq a_{i+1} \cdot \|F_{r_{i+1}}(X_{r_{i+1}})\| - \|F_{r_{i+1}}(S_i)\| - \|F_{r_{i+1}}(R_{i+2})\|.$$

On a d'après (9)

$$\|F_{i+1}(R_{i+2})\| \leq M_{r_{i+1}} \|R_{i+2}\|,$$

donc, en vertu de (12):

$$\|F_{r_{i+1}}(R_{i+1})\| \leq M_{r_{i+1}} \frac{\varepsilon}{M_{i+1} + 1} < \varepsilon.$$

Il en résulte en vertu de (10), (13) et de la condition 4(γ) que

$$\|F_{r_{i+1}}(X)\| > a_{i+1} [M_{r_{i+1}} - \varepsilon] - \frac{1}{2} a_{i+1} \cdot M_{r_{i+1}} - \varepsilon,$$

c'est-à-dire,

$$\|F_{r_{i+1}}(X)\| > \frac{1}{2} a_{i+1} \cdot M_{r_{i+1}} - \varepsilon(1 + a_{i+1}),$$

ce qui donne en vertu de 4(β):

$$(14) \quad \|F_{r_{i+1}}(X)\| > i - \varepsilon \cdot (1 + a_{i+1}).$$

Comme, selon la condition 3),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0,$$

on conclut de (14), que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|F_{r_{i+1}}(X)\| = \infty.$$

Or, c'est impossible, la suite $\{F_n(X)\}$ étant par hypothèse convergente pour chaque X .

Ainsi la supposition que la suite $\{M_n\}$ est non bornée implique une contradiction. Il existe donc la borne supérieure de la suite considérée et, comme nous l'avons déjà prouvé, cette borne satisfait à la thèse du théorème.

§ 2. THÉORÈME 6. Si

1° $U(X)$ est une opération continue dans E , le contre-domaine de $U(X)$ étant contenu dans E ;

2° Il existe un nombre $0 < M < 1$ qui pour tout X' et X'' remplit l'inégalité

$$\|U(X') - U(X'')\| \leq M \cdot \|X' - X''\|,$$

il existe un élément X tel que $X = U(X)$.

Démonstration. Y désignant un élément choisi d'une façon arbitraire, soit $\{X_n\}$ une suite qui satisfait aux conditions:

$$X_1 = Y \quad \text{et pour tout } n \quad X_{n+1} = U(X_n).$$

Nous allons démontrer que la suite $\{X_n\}$ converge suivant la norme vers un certain élément X . On observera dans ce but que l'on a pour tout $n > 1$:

$$\|X_{n+1} - X_n\| = \|U(X_n) - U(X_{n-1})\| \leq M \|X_n - X_{n-1}\|,$$

d'où

$$\|X_{n-1} - X_n\| \leq M^{n-1} \|X_2 - X_1\|.$$

On a par hypothèse $M < 1$; la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_{n+1} - X_n\|$ est donc convergente, ce qui implique que la série $X_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (X_{n+1} - X_n)$ converge suivant la norme vers un certain élément X .

Or,

$$X_1 + \sum_{n=1}^{n-1} (X_{n+1} - X_n) = X_n$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X.$$

$U(X)$ étant continu, on a $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} U(X_n) = U(X)$ et comme

$$X_n = U(X_{n-1}),$$

on trouve

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} U(X_{n-1})$$

et finalement

$$X = U(X). \quad \text{c.q.f.d.}$$

THÉORÈME 7. $X + \alpha \cdot F(X) = Y$ étant une équation où Y désigne un élément donné et X l'élément inconnu, soit:

1° $F(X)$ — une opération additive continue dans le champ E à contre-domaine contenu dans E ;

2° M — le plus petit des nombres qui satisfont à l'inégalité

$$\|F(X)\| \leq M \|X\|;$$

3° α — un nombre réel quelconque;

pour tout Y et pour tout h satisfaisant à l'inégalité $|h \cdot M| < 1$ il existe une solution de cette équation et on peut la mettre sous la forme

$$(15) \quad X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n)}(Y),$$

où les opérations $F^{(n)}(Y)$ sont déterminées pour chaque n par les relations:

$$F^{(1)}(Y) = F(Y) \quad \text{et} \quad F^{(n)}(Y) = F(F^{(n-1)}(Y)).$$

Démonstration. On a par hypothèse

$$\|F^{(n)}(Y)\| = \|F(F^{(n-1)}(Y))\| \leq M \|F^{(n-1)}(Y)\|,$$

donc

$$\|F^{(n)}(Y)\| \leq M^n \|Y\|.$$

Ceci établi, nous allons prouver la convergence de la série (15). On remarquera que

$$\|(-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n)}(Y)\| \leq |h|^n \cdot M^n \cdot \|Y\|,$$

c'est-à-dire, que

$$\|(-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n)}(Y)\| \leq |h \cdot M|^n \cdot \|Y\|.$$

Par conséquent, si l'on admet que $|h \cdot M| < 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n)}(Y)\|$$

est convergente, ce qui entraîne précisément — en vertu du théorème 8, chapitre I — la convergence de la série (15).

Posons

$$X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n)}(Y).$$

L'opération $F(X)$ étant continue, on a

$$F(X) = F(Y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot h^n \cdot F^{(n+1)}(Y),$$

ce qui donne

$$-h \cdot F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot h^n \cdot F^n(Y),$$

d'où

$$-h \cdot F(X) = X - Y \quad \text{et} \quad X + h \cdot F(X) = Y.$$

On voit ainsi que l'élément défini par la série (15) existe et satisfait à l'équation considérée pour chaque Y , pourvu que $|h \cdot M| < 1$.

III

§ 1. Admettons que les éléments du champ E sont des fonctions mesurables à une variable, définies dans un intervalle (a, b) sauf, peut-être, un ensemble de mesure nulle. Deux fonctions appartenant à E seront considérées comme égales, si elles ne diffèrent que dans un ensemble de mesure nulle. Par "addition et multiplication par un nombre" nous entendrons l'addition et la multiplication ordinaires. Nous ne définissons pas la norme, mais nous admettons qu'elle satisfait outre des anciennes à certaines conditions supplémentaires. Avant d'énoncer les nouveaux axiomes nous allons introduire la définition de la *convergence asymptotique* donnée par Hardy et Landau.

Définition. Soit

1° $\{X_n(t)\}$ une suite des fonctions mesurables définies dans (a, b) sauf, peut-être, un ensemble de mesure nulle;

2° $X(t)$ une fonction mesurable définie également dans (a, b) sauf un ensemble de mesure nulle.

Nous dirons que la suite $\{X_n(t)\}$ converge *asymptotiquement* vers $X(t)$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ la mesure L de l'ensemble des valeurs de t qui vérifient l'inégalité $|X_n(t) - X(t)| \geq \varepsilon$ tend vers 0 avec $1/n$. Par écrit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym } X_n(t) = X(t).$$

Les axiomes que nous allons introduire sont les suivants:

IV. Si

1° $\{X_n(t)\}$ est une suite des fonctions appartenant à E ;

2° $X(t)$ est une fonction appartenant à E ;

3° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t)$;

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym } X_n(t) = X(t).$$

V. Si

1° $\{X_n(t)\}$ est une suite des fonctions appartenant à E ;

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| = 0$;

on peut extraire de la suite $\{X_n(t)\}$ une suite $\{\bar{X}_n(t)\}$ qui possède la propriété suivante: il existe une fonction $X(t)$ appartenant à E et satisfaisant à l'inégalité

$$|\bar{X}_n(t)| \leq |X(t)|$$

pour tout n et pour tout t sauf, peut-être, un ensemble de mesure lebesgienne nulle.

Remarque. $||$ est le signe de la valeur absolue.

VI. Si

1° $\{X_n(t)\}$ est une suite des fonctions appartenant à E ;

2° $X(t)$ est une fonction appartenant à E ;

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym } X_n(t) = X(t)$;

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\|.$$

Nous n'avons pas donné ces axiomes dès le début, afin de faire mieux ressortir les conséquences qui résultent des axiomes I-III.

THÉORÈME 1. Si

1° $K(s, t)$ est une fonction mesurable à deux variables définie pour tout couple des nombres (s, t) dont chacun appartient à (a, b) ;

2° Pour tout $X(t)$ appartenant à E l'ensemble des valeurs de s , pour lesquelles le symbole $\int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt$ n'existe pas, est de mesure lebesgienne nulle;

3° $\{X_n(t)\}$ est une suite des fonctions appartenant à E et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = 0$;

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym } \int_a^b K(s, t) \cdot X_n(t) dt = 0.$$

Démonstration. Soit

$$(1) \quad \Phi_n(s) = \int_a^b K(s, t) \cdot X_n(t) dt.$$

Supposons que la suite $\{\Phi_n(s)\}$ ne converge pas asymptotiquement vers 0. Il existe par conséquent un tel nombre $\varepsilon > 0$ que la mesure de l'ensemble des valeurs de s qui satisfont à l'inégalité $|\Phi_n(s)| \geq \varepsilon$ ne tend pas vers 0 avec $1/n$. On peut donc extraire de la suite $\{\Phi_n(s)\}$ une suite partielle $\{\bar{\Phi}_n(s)\}$ telle que la mesure de l'ensemble des valeurs de s , qui satisfont à l'inégalité $|\bar{\Phi}_n(s)| \geq \varepsilon$, tende vers un certain nombre m distinct de 0.

Désignons par $\{\bar{X}_n(t)\}$ la suite qui correspond à $\{\bar{\Phi}_n(s)\}$ selon (1). Comme on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n(t) = 0$ conformément à l'hypothèse 3°, on peut, en vertu de l'axiome V, extraire de la suite $\{\bar{X}_n(t)\}$ une suite partielle $\{\bar{X}_n(t)\}$ de façon qu'il existe une fonction $X(t)$ appartenant à E et satisfaisant à l'inégalité:

$$(2) \quad |\bar{X}_n(t)| \leq |X(t)|$$

pour tout n et pour tout t sauf, peut-être, un ensemble de mesure nulle.

L'inégalité (2) donne:

$$(3) \quad |K(s, t) \cdot \bar{X}_n(t)| \leq |K(s, t) \cdot X(t)|$$

pour tout n et pour tout t sauf, peut-être, un ensemble de mesure nulle.

La mesure de l'ensemble de valeurs de s , pour lesquelles

$$\int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt \quad \text{et par suite} \quad \int_a^b |K(s, t) \cdot X(t)| dt$$

n'existe pas, est nulle selon l'hypothèse 2°. L'axiome IV et l'inégalité (3) impliquent donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K(s, t) \bar{X}_n(t) dt = 0 \quad (1)$$

pour presque tout s .

Par conséquent, en posant

$$\bar{\Phi}_n(s) = \int_a^b K(s, t) \bar{X}_n(t) dt \quad (2)$$

on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym} \bar{\Phi}_n(s) = 0.$$

Or, $\{\bar{\Phi}_n(s)\}$ étant contenu dans $\{\bar{\Phi}_n(s)\}$, le dernier résultat est en contradiction avec la propriété de $\{\bar{\Phi}_n(s)\}$ d'après laquelle la mesure de l'ensemble des s , qui satisfont à l'inégalité $|\bar{\Phi}_n(s)| \geq \varepsilon$, tend vers un nombre $m \neq 0$. Ainsi la supposition qu'on puisse avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym} \int_a^b K(s, t) X_n(t) dt \neq 0$$

conduit à une contradiction. Notre théorème est donc démontré.

(1) Je m'appuie sur le théorème suivant: si 1° $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym} f_n(t) = 0$, où $\{f_n(t)\}$ est une suite des fonctions mesurables dans (a, b) , 2° $f(t)$ est une fonction intégrable positive vérifiant l'inégalité $|f_n(t)| \leq f(t)$ pour chaque n et t sauf un ensemble de mesure nulle, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = 0$.

(2) Je m'appuie sur le théorème suivant: si 1° $\{f_n(s)\}$ est une suite des fonctions mesurables définies dans (a, b) , 2° presque partout $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym} f_n(s) = 0$.

LEMME 1. Les hypothèses 1° et 2° du théorème 1 étant vérifiées, lorsqu'en outre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t),$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{asym} \int_a^b K(s, t) \cdot X_n(t) dt = \int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt.$$

Admettons à présent que E_1 est un ensemble de fonctions qui satisfait, lui aussi, aux axiomes I-VI. Nous n'admettons pas par cela que l'ensemble E_1 soit identique à l'ensemble E . La norme de l'un peut différer entièrement de celle de l'autre.

THÉORÈME 2. La fonction $K(s, t)$ satisfaisant aux hypothèses 1° et 2° du théorème précédent, si, en outre,

3° toutes les fois que $X(t)$ appartient à E , la fonction

$$Y(s) = \int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt$$

appartient à E_1 ,

il existe un nombre $M > 0$ tel que l'inégalité

$$\left\| \int_a^b K(s, t) X(t) dt \right\| \leq M \cdot \|X(t)\|$$

subsiste pour tout $X(t)$ appartenant à E .

Démonstration. Remarquons que

$$Y(s) = \int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt,$$

où $X(t)$ est une variable indépendante et $Y(s)$ - dépendante, est une opération additive. Le lemme précédent nous apprend que si la suite $\{X_n(t)\}$ converge suivant la norme vers $X(t)$, la suite $\{Y_n(s)\}$ converge asymptotiquement vers $Y(s)$.

Il en résulte en vertu de l'axiome VI que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\| \int_a^b K(s, t) \cdot X_n(t) dt \right\| \geq \left\| \int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt \right\|,$$

ce qui implique (en vertu du théorème 3, chapitre II) la continuité de l'opération $\int_a^b K(s, t) \cdot X(t) dt$. L'existence du nombre M est donc assurée par le lemme 3, chapitre II.

§ 2. Nous allons démontrer dans ce paragraphe que les axiomes I-VI sont vrais pour tous les champs énumérés dans l'Introduction, si l'on admet les définitions convenables de la norme.

Ad axiome I. Pour tous les champs considérés on assignera aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre la signification algébrique habituelle. Toutes les lois de I se trouveront ainsi réalisées.

Ad axiome II. Quant à la définition de la norme, nous l'établirons de la façon suivante:

Pour le champ (\mathcal{C}) : $\|f(x)\| = \max |f(x)|$.

Pour le champ (\mathcal{M}) : $\|f(x)\| = \text{vrai max } |f(x)|$. C'est le plus petit des nombres M pour lesquels l'inégalité $|f(x)| > M$ ne subsiste que dans un ensemble de mesure nulle.

Pour le champ (\mathcal{E}^r) où $r \geq 1$: $\|f(x)\| = \sqrt[r]{\int_a^b |f(x)|^r dx}$.

Pour le champ (\mathcal{D}) : $\|f(x)\| = \max |f(x)|$.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$: $\|f(x)\| = \max |f(x)| + \max \left| \frac{d^p f(x)}{dx^p} \right|$.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{E}^r)$ où $r > 1$:

$$\|f(x)\| = \max |f(x)| + \sqrt[r]{\int_a^b \left| \frac{d^p f(x)}{dx^p} \right|^r dx}.$$

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$: $\|f(x)\| = \max |f(x)| + \text{vrai max} \left| \frac{d^p f(x)}{dx^p} \right|$.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$: $\|f(x)\| = \max |f(x)| + \max \left| \frac{d^p f(x)}{dx^p} \right|$.

L'axiome II est manifestement vrai pour les champs: (\mathcal{C}) , $(\mathcal{M})^r$, (\mathcal{D}) , $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$ et $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$. M. W. H. Young a démontré pour le champ (\mathcal{E}^r) un théorème équivalent à l'axiome II⁽³⁾. L'axiome II pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{E}^r)$ en est une conséquence immédiate.

Ad axiome III. Pour le champ (\mathcal{C}) . La convergence suivant la norme a dans ce champ la signification de la convergence uniforme. Il en résulte (suivant le théorème connu de l'Analyse, d'après lequel toute suite uniformément convergente des fonctions continues admet une limite, qui est une fonction continue) que l'axiome III est rempli.

Pour les champs (\mathcal{M}) , (\mathcal{D}) , $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$ et $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$ la question est analogue.

Pour le champ (\mathcal{E}^r) . La convergence suivant la norme est ici la convergence en moyenne avec la $r^{\text{ième}}$ puissance. Dans l'ouvrage cité M. Young

⁽³⁾ Quarterly Journal of Mathematics 1912.

Ce théorème est le suivant: $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions définies dans (a, b) de puissance $r \geq 1$ intégrable, on a

$$\sqrt[r]{\int_a^b |f + \varphi|^r dx} \leq \sqrt[r]{\int_a^b |f|^r dx} + \sqrt[r]{\int_a^b |\varphi|^r dx}.$$

a démontré un théorème équivalent pour le champ (\mathcal{E}^r) à l'axiome III⁽⁴⁾.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{E}^r)$ l'axiome résulte de ce que nous venons de dire de champ (\mathcal{E}^r) .

Ad axiome IV. Pour le champ (\mathcal{E}^r) un théorème équivalent à l'axiome IV a été démontré par M. Young.

Pour les autres champs cet axiome est évident.

Ad axiome V. Pour les champs (\mathcal{C}) , $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{E}^r)$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$, (\mathcal{D}) et (\mathcal{M}) la fonction qui satisfait à l'axiome V est une certaine fonction constante.

Pour le champ (\mathcal{E}^r) l'axiome IV peut être établi comme suit (sans modifier la notation adoptée dans l'énoncé de cet axiome):

On remarquera que $X(t)$ appartenant à (\mathcal{E}^r) , $|X(t)|$ y appartient également, et que l'on a, en outre, $\| |X(t)| \| = \| X(t) \|$.

On a par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| X_n(t) \| = 0,$$

on peut donc extraire de la suite $\{X_n(t)\}$ une telle suite partielle $\{\bar{X}_n(t)\}$ que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{X}_n(t)\|$ soit convergente.

Il en résulte en vertu du théorème 8, chapitre I, de l'axiome IV et de l'égalité

$$\| |\bar{X}_n(t)| \| = \| \bar{X}_n(t) \|,$$

que la série

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{X}_n(t)|$$

converge asymptotiquement suivant la norme vers une fonction que nous désignerons par $X(t)$. Les termes de la série (4) n'étant pas négatifs, la convergence asymptotique de cette série implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{X}_n(t)| = X(t)$$

⁽⁴⁾ Si 1° $\{f_n(x)\}$ est une suite de fonctions de puissance r intégrable, définies dans (a, b) ;

2^o $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\int_a^b |f_p - f_q|^r dx} = 0$,

il existe une telle fonction $f(x)$ de puissance r intégrable définie dans (a, b) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\int_a^b |f - f_n|^r dx} = 0.$$

pour presque tous les points. On en conclut que

$$|X_n(t)| \leq X(t)$$

pour tout n et pour tout t sauf un ensemble de mesure nulle.

Ad axiome VI. Pour prouver que l'axiome VI est réalisé, nous allons établir un théorème un peu différent, à savoir celui que l'on obtient de l'axiome VI en y remplaçant l'hypothèse 3° par la suivante „on a $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t)$ pour chaque t , excepté peut-être un ensemble de mesure nulle”.

L'axiome VI s'en déduit comme suit. Admettons notre théorème auxiliaire démontré et supposons que, les hypothèses 1°-3° de l'axiome VI étant réalisées, on ait:

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| < \|X(t)\|.$$

Nous pouvons donc extraire de la suite $\{X_n(t)\}$ une telle suite partielle $\{\bar{X}_n(t)\}$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| < \|X(t)\|.$$

De la suite $\{X_n(t)\}$ on peut extraire, en vertu de l'hypothèse 3, une suite $\{X_n(t)\}$ convergente pour presque tout point $X(t)$. Or, c'est impossible d'après notre théorème auxiliaire et suivant l'inégalité (5).

Nous passons maintenant à la démonstration du susdit théorème pour les champs considérés.

Pour le champ (\mathcal{C}) . Admettons qu'on a le $\max |X(t)|$ pour $t = t_0$. On peut donc trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un tel $\eta > 0$ que chaque t qui satisfait à l'inégalité $|t_0 - t| \leq \eta$ remplit également l'inégalité

$$(6) \quad |X(t)| \geq |X(t_0)| - \varepsilon = \|X(t)\| - \varepsilon.$$

La suite $\{X_n(t)\}$ étant presque partout convergente, il existe un point t' satisfaisant à l'inégalité $|t_0 - t'| < \eta$ et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t') = X(t').$$

Comme

$$|X_n(t')| \leq \|X_n(t)\|,$$

l'inégalité (6) donne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\| - \varepsilon.$$

Or, cette inégalité subsiste pour chaque ε . On a donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\|, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Pour le champ (\mathcal{M}) . Pour chaque nombre positif arbitraire ε il existe un tel ensemble de points $A(t)$ de mesure lebesguienne positive que tout point t appartenant à $A(t)$ satisfait aux conditions:

$$(7) \quad |X(t)| \geq \|X(t)\| - \frac{1}{2} \varepsilon$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t).$$

Désignons par $A_n(t)$ l'ensemble de tels points appartenant à $A(t)$ pour lesquels

$$(8) \quad |X_n(t) - X(t)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

et

$$(9) \quad |X_n(t)| \leq \|X_n(t)\|.$$

Comme la suite $\{X_n(t)\}$ converge vers $X(t)$ pour tous les points de l'ensemble $A(t)$, qui est de mesure positive, on peut trouver un tel N que la mesure de l'ensemble $A_n(t)$ soit également positive pour tout $n > N$.

Les inégalités (7) et (8) impliquent qu'on a pour chaque t appartenant à $A_n(t)$:

$$(10) \quad |X_n(t)| \geq \|X(t)\| - \varepsilon.$$

d'où, en vertu de (9),

$$\|X_n(t)\| \geq \|X(t)\| - \varepsilon$$

pour chaque $n > N$. Il en résulte que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\| - \varepsilon$$

et comme cette inégalité subsiste pour tout ε , on a:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\|.$$

Pour le champ (\mathcal{D}) . $X(t)$ étant une fonction duhamelienne, on a

$$(11) \quad \max |X(t)| \leq \text{vrai max } |X(t)|.$$

En effet, pour tous t et $h > 0$ où t et $t+h$ appartiennent à (a, b) ,

$$(12) \quad \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} X(t) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |X(t)| dt \leq \text{vrai max } |X(t)|,$$

ce qui donne pour le point $t = b-h$

$$(13) \quad \left| \frac{1}{h} \int_{b-h}^b X(t) dt \right| \leq \text{vrai max } |X(t)|.$$

Or, $X(t)$ étant duhamelien, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_i^{i+h} X(t) dt = X(i) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{b-h}^b X(t) dt = X(b),$$

ce qui conduit — en vertu des inégalités (12) et (13) — précisément à l'inégalité (11).

Comme le signe $<$ ne peut figurer seul entre les deux termes de l'égalité (11), on a

$$\max |X(t)| = \text{vrai max } |X(t)|$$

et en s'appuyant sur cette égalité on peut démontrer l'axiome VI pour le champ (\mathcal{D}) de la même façon que pour (\mathcal{M}) .

Pour le champ (\mathcal{S}^n) . Désignons par $X_n(t, L)$, où $L > 0$, une fonction définie dans (a, b) de la façon suivante:

$$\begin{aligned} X_n(t, L) &= X_n(t) & \text{lorsque } |X_n(t)| \leq L, \\ X_n(t, L) &= L & \text{lorsque } |X_n(t)| > L. \end{aligned}$$

Comme la suite $\{X_n(t, L)\}$ est uniformément bornée et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n(t, L)\} = X(t, L)$$

presque partout, on a

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\int_a^b |X_n(t, L)|^r dt} = \sqrt[r]{\int_a^b |X(t, L)|^r dt}.$$

Comme

$$|X_n(t, L)| \leq |X_n(t)|,$$

on a

$$\sqrt[r]{\int_a^b |X_n(t, L)|^r dt} \leq \sqrt[r]{\int_a^b |X_n(t)|^r dt} = \|X_n(t)\|.$$

Nous pouvons donc écrire en vertu de l'inégalité (14):

$$(15) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \sqrt[r]{\int_a^b |X(t, L)|^r dt}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\int_a^b |X(t, L)|^r dt} = \sqrt[r]{\int_a^b |X(t)|^r dt} = \|X(t)\|,$$

ce qui donne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| \geq \|X(t)\|,$$

puisque l'inégalité (15) subsiste pour tout $L > 0$.

Avant d'établir l'axiome VI pour les autres champs, nous allons démontrer quelques théorèmes auxiliaires.

THÉORÈME 1. Si

1° $\{f_n(x)\}$ est une suite des fonctions positives non-décroissantes définies dans l'intervalle (a, b) ;

2° Il existe un nombre $M > 0$ qui remplit pour chaque n l'inégalité $f_n(b) \leq M$;

on peut extraire de la suite $\{f_n(x)\}$ une suite partielle qui converge partout vers une fonction non-décroissante $f(x)$.

Démonstration. Désignons par $\{a_n\}$ une suite composée de tous les nombres rationnels de l'intervalle (a, b) ; par $\{f_n^{(1)}(x)\}$ une suite de fonctions extraite de la suite $\{f_n(x)\}$ et convergente pour $x = a_1$, par $\{f_n^{(2)}(x)\}$ une suite extraite de la suite $\{f_n^{(1)}(x)\}$ et convergente pour $x = a_2$ (elle est donc en même temps convergente pour $x = a_1$), et d'une façon générale par $\{f_n^{(i)}(x)\}$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$, une suite extraite de $\{f_n^{(i-1)}(x)\}$ et convergente pour $x = a_i$ (donc, évidemment, pour $x = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}$). En conservant cette notation, envisageons la suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$ dont le $k^{\text{ème}}$ terme est $k^{\text{ème}}$ dans la suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$. Il est évident que la suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$ est convergente pour tout a_i .

Posons donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(a_i) = P(a_i).$$

On remarque que

$$\text{lorsque } a_i > a_j, \quad \text{on a } f_k^{(k)}(a_i) \geq f_k^{(k)}(a_j)$$

et par conséquent

$$(16) \quad P(a_i) \geq P(a_j).$$

Désignons par $\Phi(x)$ la fonction définie dans (a, b) de la façon suivante:

$\Phi(a) =$ borne inférieure de l'ensemble des nombres $P(a_i)$, lorsque $x > a$, $\Phi(x) =$ borne supérieure de l'ensemble des nombres $P(a_i)$ pour tous les a_i appartenant à l'intervalle (a, x) .

En vertu des hypothèses 1° et 2°, la fonction $\Phi(x)$ est bien déterminée, puisqu'on a pour tout a_i :

$$0 \leq P(a_i) \leq M.$$

De plus, en vertu de (16), la fonction $\Phi(x)$ n'est pas décroissante et on a pour tout a_i :

$$\Phi(a_i) = P(a_i).$$

$\Phi(x)$ est donc — d'après un théorème connu — partout continu, excepté, peut-être, une infinité dénombrable de points. Or, si $\Phi(x)$ est continu pour

un certain x_0 (où $a \neq x_0 \neq b$), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x) = \Phi(x).$$

On peut donc trouver, pour un $\varepsilon > 0$ donné arbitrairement, deux nombres rationnels a et a' qui remplissent les inégalités:

$$(17) \quad a < x_0 < a', \quad \Phi(a') - \varepsilon \leq \Phi(x_0) \leq \Phi(a) + \varepsilon,$$

et on aura pour tout k en vertu de l'hypothèse 1°:

$$f_k^{(k)}(a) \leq f_k^{(k)}(x) \leq f_k^{(k)}(a').$$

La suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$ étant convergente pour tout a et a' rationnel, on a:

$$\Phi(a) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x_0) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x_0) \leq \Phi(a'),$$

d'où, en vertu de (17):

$$\Phi(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x_0) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x_0) \leq \Phi(x_0) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité subsiste pour chaque ε positif, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(k)}(x_0) = \Phi(x_0).$$

On voit par conséquent que l'ensemble des points, pour lesquels la suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$ n'est pas convergente, est au plus dénombrable. En appliquant à la suite $\{f_k^{(k)}(x)\}$ le même procédé, qui a été appliqué auparavant à la suite $\{f_n(x)\}$, on peut donc enlever une suite $\{\bar{f}_n(x)\}$ convergente pour chaque point. Soit $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x)$; il est évident que $f(x)$ est aussi une fonction qui ne va pas en décroissant.

LEMME 1. Si

1° $\{f_n(x)\}$ est une suite de fonctions à variation bornée définies dans un intervalle (a, b) ;

2° il existe un tel nombre M qu'on ait pour tout n

$$\max |f_n(x)| \leq M \quad \text{et} \quad \text{variation } f_n(x) \leq M;$$

on peut tirer de la suite $\{f_n(x)\}$ une suite partielle qui converge en tous les points vers une certaine fonction $f(x)$ à variation bornée.

THÉORÈME 2. Si

1° $f(x)$ est une fonction de puissance r intégrable définie presque partout dans l'intervalle (a, b) ;

2° \mathcal{D}_k est un mode de subdivision de segment (a, b) , déterminé par les points

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \dots < x_{n(k)-1}^{(k)} < x_{n(k)}^{(k)} = b;$$

3° Le maximum de longueur des intervalles partiels pour les subdivisions \mathcal{D}_k tend vers 0 avec $1/k$,

on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n(k)-1} \left| \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx \right|^r = \int_a^b |f(x)|^r dx.$$

Démonstration. Désignons en général par $\zeta_\alpha^\beta(x)$, où $a \leq \alpha < \beta \leq b$, une fonction définie dans l'intervalle (a, b) de la façon suivante:

$$\zeta_\alpha^\beta(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{lorsque} \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

et

$$\zeta_\alpha^\beta(x) = 0 \quad \text{pour les autres points de l'intervalle } (a, b).$$

Considérons la fonction

$$(18) \quad \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{n(k)-1} \zeta_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} \cdot \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx$$

et remarquons que, x_0 étant situé à l'intérieur de l'intervalle $(x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)})$, on a

$$\varphi_k(x_0) = \frac{1}{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}} \cdot \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx,$$

car les autres termes s'annulent par la définition-même de ζ_α^β pour x_0 .

Par suite, si x_0 n'est un point de subdivision d'aucun \mathcal{D}_k et si, en outre, $f(x)$ est pour x_0 la dérivée de sa fonction primitive, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\mathcal{D}_k}(x_0) = f(x_0).$$

L'ensemble des points de subdivision de tous les \mathcal{D}_k , étant dénombrable et $f(x)$, comme fonction intégrable, étant la dérivée de sa fonction primitive pour presque tous les points, on a pour presque tout x

$$(19) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = f(x).$$

Or,

$$(20) \quad \int_a^b |\varphi_k|^r dx \leq W_k.$$

Lorsque $r > 1$, on a en vertu du théorème de M. Young:

$$\left| \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx \right|^r \leq \left\{ \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} |f|^r dx \cdot \frac{1}{\sqrt[r-1]{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}} \right\}^r,$$

c'est-à-dire,

$$(21) \quad \left| \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx \right|^r \leq \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} |f|^r dx \cdot (x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)})^{r-1}.$$

Cette inégalité est valable aussi pour $r = 1$, car elle prend alors la forme

$$\left| \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} f(x) dx \right| \leq \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} |f| dx.$$

L'inégalité (21) subsiste donc pour chaque $r \geq 1$.

On en déduit que:

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|^r dx \leq W_k(f) \leq \sum_{i=1}^{n(k)-1} \int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} |f(x)|^r dx = \int_a^b |f|^r dx.$$

On a donc:

$$(22) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_k(x)|^r dx \leq \int_a^b |f|^r dx.$$

La fonction $\varphi_k(x)$ tendant presque partout vers $f(x)$, on a établi en vertu de l'axiome VI pour le champ (\mathcal{S}^r):

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_k(x)|^r dx \geq \int_a^b |f|^r dx.$$

En comparant cette inégalité à l'inégalité (22), on s'aperçoit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_k(x)|^r dx = \int_a^b |f|^r dx,$$

ce qui donne, en vertu de (20), l'égalité:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(f) = \int_a^b |f|^r dx$$

qui était à démontrer.

THÉOREME 3. Si

1° $f(x)$ et les fonctions de la suite $\{f_n(x)\}$ sont continues dans (a, b) à $(p-1)$ -^{ème} dérivée absolument continue;

2° Il existe des nombres $M > 0$ et $r \geq 1$ tels qu'on ait pour tout n :

$$\int_a^b |f^{(p)}(x)|^r dx \leq M, \quad \int_a^b |f_n^{(p)}(x)|^r dx \leq M, \\ \max |f(x)| \leq M \quad \text{et} \quad \max |f_n(x)| \leq M;$$

3° On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ en presque tous les points de (a, b) ;

on peut extraire de la suite $\{f_n(x)\}$ une suite $\{\bar{f}_n(x)\}$ telle qu'on ait:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n^{(p-1)}(x) = f^{(p-1)}(x)$$

pour tout x .

Démonstration. On a:

$$\text{variation de } \int_a^t f_n^{(p)}(x) dx = \int_a^t |f_n^{(p)}(x) dx|$$

$$\leq \sqrt[r]{\int_a^t |f_n^{(p)}(x)|^r dx} \cdot \sqrt[r-1]{b-a} \leq \sqrt[r]{M} \cdot \sqrt[r-1]{b-a}$$

et comme

$$\int_a^t f_n^{(p)}(x) dx \leq \sqrt[r]{M} \cdot \sqrt[r-1]{b-a},$$

la suite $\{\int_a^t f_n^{(p)}(x) dx\}$ satisfait aux conditions du lemme 1.

On peut donc en extraire une suite de fonctions $\{\int_a^t f_n^{(p)}(x) dx\}$ convergentes en tous les points vers une fonction que nous désignerons par $\varphi(t)$.

Or, on a

$$(23) \quad \bar{f}_n(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} \cdot \bar{f}_n^{(p)}(t) dt + P_n(x),$$

où $P_n(x)$ est un polynôme du degré $p-1$. En vertu de cette égalité et de l'hypothèse 2°, la suite des polynômes $\{P_n(x)\}$ est uniformément bornée; on peut donc en extraire une suite $\{\bar{P}_n(x)\}$ uniformément convergente vers un polynôme (que nous désignerons par $P(x)$) du degré tout au plus $p-1$.

Comme on a

$$\frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} \bar{f}_n^{(p)}(t) dt = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^x \left((x-t)^{p-2} \int_a^t f_n^{(p)}(s) ds \right) dt$$

et comme la suite $\int_a^t \bar{f}_n^{(p)}(s)$, qui est uniformément bornée, tend en tous les points vers 0, on a

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} \cdot \bar{f}_n^{(p)}(t) dt = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^x (x-t)^{p-2} \varphi(t) dt.$$

On déduit de (23) et (24), $\bar{f}_n^{(p)}(x)$ désignant le $\bar{P}_n(x)$ correspondant, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^x (x-t)^{p-2} \varphi(t) dt + P(x)$$

uniformément.

Par hypothèse on a presque partout:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

on aura donc:

$$f(x) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^x (x-t)^{p-2} \varphi(t) dt + P(x)$$

et pour les dérivées $(p-1)^{\text{èmes}}$ des deux nombres:

$$(25) \quad f^{(p-1)}(x) = \varphi(x) = P^{(p-1)}(x).$$

L'égalité (23) donne en plus:

$$(26) \quad \bar{f}_n^{(p-1)}(x) = \int_a^x \bar{f}_n^{(p)}(x) + \bar{P}^{(p-1)}(x).$$

Or, on a pour tout x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n^{(p)}(x) = \varphi(x)$$

et, $\{P_n(x)\}$ étant une suite de polynômes de degré tout au plus $(p-1)$ qui convergent uniformément vers $P(x)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}_n^{(p-1)}(x) = P^{(p-1)}(x)$$

Il en résulte en vertu de (25) et (26) qu'on a pour tous les points

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n^{(p-1)}(x) = f^{(p-1)}(x) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Ces théorèmes établis, nous passons à la démonstration de l'axiome VI, ou plutôt du théorème qui l'implique, pour les champs $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{S}^r)$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$ et $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$.

La démonstration est apagogique.

Supposons que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(t)\| < \|X(t)\|.$$

On peut donc tirer de la suite $\{X_n(t)\}$ une suite partielle $\{\bar{X}_n(t)\}$ telle qu'on ait

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{X}_n(t)\| < \|X(t)\|.$$

En vertu de l'hypothèse 3° (modifiée), on a:

$$(28) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \max |X_n(t)| \geq \max |X(t)|.$$

Comme les suites $\{\bar{X}_n(t)\}$ et $\{X_n(t)\}$ satisfont en vertu de (27) pour les champs $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{S}^r)$, $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$ et $(\mathcal{E}^p \mathcal{C})$ aux conditions du théorème 5, on peut extraire de la suite $\{\bar{X}_n(t)\}$ une suite partielle $\{\bar{X}_n(t)\}$ telle qu'on ait pour tout point de l'intervalle (a, b) :

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n^{(p-1)}(t) = X^{(p-1)}(t).$$

Les résultats obtenus jusqu'à présent sont valables pour tous les quatre champs à la fois. Nous allons maintenant achever la démonstration pour chacun d'eux à part.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$. Étant donné un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux nombres $t_1 > t_2$ compris dans (a, b) qui satisfont à l'inégalité

$$(30) \quad \left| \frac{X^{(p-1)}(t_2) - X^{(p-1)}(t_1)}{t_2 - t_1} \right| > \text{vrai max } |X^{(p)}(t)| - \varepsilon.$$

Mais

$$\left| \frac{\bar{X}_n^{(p-1)}(t_2) - \bar{X}_n^{(p-1)}(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq \text{vrai max } |\bar{X}_n^{(p)}(t)|$$

quel que soit n .

Il en résulte en vertu de (29) et (30) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{vrai max } |\bar{X}_n^{(p)}(t)| \geq \text{vrai max } |X^{(p)}(t)| - \varepsilon$$

et, comme cette inégalité subsiste pour chaque ε , on a

$$(31) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{vrai max } |\bar{X}_n^{(p)}(t)| \geq \text{vrai max } |X^{(p)}(t)|.$$

Or, on a pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$

$$\|X(t)\| = \max |X(t)| + \text{vrai max } |X^{(p)}(t)|,$$

ce qui donne en vertu de (28) et (31):

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{X}_n(t)\| &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \max |\bar{X}_n(t)| + \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{vrai max } |\bar{X}_n^{(p)}(t)| \\ &\geq \max |X(t)| + \text{vrai max } |X^{(p)}(t)| = \|X(t)\|. \end{aligned}$$

Le dernier résultat est en contradiction avec (27), ce qui prouve que notre théorème — et par conséquent l'axiome VI — est vrai pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{M})$.

Pour le champ $(\mathcal{E}^p \mathcal{D})$ la marche de la démonstration est analogue: $f(x)$ étant une fonction duhamelienne, on a

$$\max |f(x)| = \text{vrai max } |f(x)|.$$

Cette analogie se présente également pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{C})$.

Nous passons maintenant au dernier champ, qui est $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$.

Pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$. Ayant choisi arbitrairement un nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver un mode de subdivision \mathfrak{S}_k de l'intervalle (a, b) , tel que, la notation du théorème 4 étant conservée, on ait

$$(32) \quad W_k(X^{(p)}(t)) \geq \int_a^x |X^{(p)}(t)|^r dt - \varepsilon.$$

On a, en vertu de (29):

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_k(\bar{X}_n^{(p)}(t)) = W_k(X^{(p)}(t)).$$

On a en outre

$$W_k(\bar{X}_n^{(p)}(t)) \leq \int_a^b |X_n^{(p)}|^r dt,$$

de sorte que cette inégalité implique, en vertu de (32) et (33), la suivante:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\bar{X}_n^{(p)}(t)|^r dt \geq \int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt - \varepsilon.$$

Comme cette inégalité subsiste pour chaque ε , on a:

$$(34) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\bar{X}_n^{(p)}(t)|^r dt \geq \int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt.$$

Or, on a pour le champ $(\mathcal{C}^p \mathcal{S}^r)$:

$$\|X(t)\| = \max |X(t)| + \sqrt[r]{\int_a^b |X^{(p)}(t)|^r dt},$$

ce qui donne en vertu de (28) et (34):

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{X}_n(t)\| \geq \|X(t)\|,$$

résultat contradictoire avec (27).

L'axiome VI est donc établi pour tous les champs considérés.

Sur le prolongement de certaines fonctionnelles

publié dans Bull. Sci. Math. (2) 49 (1925), p. 301-307.

1. Soit E un espace métrique continu, dans lequel par conséquent deux points quelconques a, b ont une distance ab bien définie, qui remplit les conditions suivantes: 1° $ab = ba > 0$ pour $a \neq b$, $aa = 0$; 2° $ab + bc \geq ac$; 3° on peut joindre deux points quelconques par un arc simple. (Un arc simple est une image continue et biunivoque d'un segment.)

Soit B un sous-ensemble dense dans E , c'est-à-dire que l'ensemble dérivé de B soit égal à E . Considérons une fonctionnelle U définie pour tous les éléments de l'ensemble B .

Désignons par $\omega(x)^{(1)}$ $\limsup U(a) - \liminf U(a)$, $a \rightarrow x$, $a \neq x$, $a \in B$. Il est clair que, si pour un point x , $\omega(x) > 0$, on ne peut pas définir U au point x de telle manière que U soit continue en x . Si nous supposons maintenant que $\omega(x) > 0$ pour chaque point de $E - B$, peut-on affirmer que la fonctionnelle U n'est pas continue dans B ?

Dans cette Note, je démontre que pour que la réponse soit affirmative, il est nécessaire et suffisant que B ne soit pas un G_δ ⁽²⁾.

M. Paul Lévy pose dans son excellent livre ⁽³⁾ le problème suivant: „Considérons une fonctionnelle U définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p , mais n'ayant aucun sens si la dérivée d'ordre p n'existe pas ou devient infinie. Peut-on affirmer qu'elle n'est pas continue d'ordre $p-1$?" Si nous admettons que la phrase „n'avoir aucun sens" est équivalente à „ne pas être défini" la réponse est triviale. En effet, la fonctionnelle qui s'annule pour chaque fonction ayant une dérivée d'ordre p finie et pour d'autres fonctions est indéfinie résout le problème de M. Lévy négativement ⁽⁴⁾. Changeons maintenant l'énoncé du problème de M.

⁽¹⁾ Nous appelons $\omega(x)$ l'oscillation au point x .

⁽²⁾ G_δ est un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

⁽³⁾ *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris 1922, p. 18-19.

⁽⁴⁾ G. Bouligand, *Sur quelques points d'analyses fonctionnelles*, Comptes Rendus 176, p. 822 et *Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 47 (1923).